

Б.В. Сонов.
Космическая электродинамика
и физика солнца МГУ 1993 - 288с

ГЛАВА 7

ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 7.1. Общая постановка задачи

Как было показано в предыдущем параграфе, система уравнений магнитной гидродинамики для идеальной среды в приближении сильного поля и холодной плазмы характеризуется только одним малым параметром $\epsilon = v/V_A$:

$$\epsilon^2 \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} [\vec{v}, \text{rot } \vec{v}], \quad (7.1.1)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \text{rot} [\vec{v}, \vec{v}], \quad (7.1.2)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div } \rho \vec{v} = 0. \quad (7.1.3)$$

Будем искать решение этой системы в виде рядов по малому параметру ϵ^2 , т.е. представим все неизвестные величины в виде

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = f^{(0)}(\vec{r}, t) + \epsilon^2 f^{(1)}(\vec{r}, t) + \dots \quad (7.1.4)$$

Тогда в нулевом порядке по ϵ^2 магнитное поле определяется

$$\text{rot } \vec{v}^{(0)}, \quad \text{rot } \vec{v}^{(0)} = 0. \quad (7.1.5)$$

Оно должно быть дополнено граничным условием, которое, вообще говоря, зависит от времени

$$\vec{v}^{(0)}(\vec{r}, t) \Big|_S = \vec{f}_1(\vec{r}, t). \quad (7.1.6)$$

Здесь S - граница области G , внутри которой применимо уравнение (7.1.5).

Изменяясь во времени в соответствии с граничными условиями (7.1.6), магнитное поле приводит в движение плазму. Кинематика

130

этого движения однозначно определяется двумя условиями. Первое из них следует из уравнения движения (7.1.1) и означает ортогональность ускорения к силовым линиям магнитного поля

$$\vec{v}^{(0)} \frac{d\vec{v}^{(0)}}{dt} = 0. \quad (7.1.7)$$

Это уравнение получается из (7.1.1) умножением последнего скалярно на вектор $\vec{v}^{(0)}$. Второе условие является следствием уравнения вращаемости (7.1.2)

$$\frac{d\vec{v}^{(0)}}{dt} = \text{rot} [\vec{v}^{(0)}, \vec{v}^{(0)}]. \quad (7.1.8)$$

Вместе с уравнением непрерывности

$$\frac{d\rho^{(0)}}{dt} + \text{div } \rho^{(0)} \vec{v}^{(0)} = 0 \quad (7.1.9)$$

уравнения (7.1.5), (7.1.7) и (7.1.8) полностью определяют неизвестные величины нулевого порядка: $\vec{v}^{(0)}(\vec{r}, t)$, $\rho^{(0)}(\vec{r}, t)$ и $\rho^{(0)}(\vec{r}, t)$, если заданы начальные условия внутри области G

$$\vec{v}^{(0)}(\vec{r}, 0) = \vec{f}_2(\vec{r}), \quad (7.1.10)$$

$$\rho^{(0)}(\vec{r}, 0) = f_3(\vec{r}). \quad (7.1.11)$$

Здесь $\vec{v}^{(0)}$ - компонента скорости вдоль силовых линий. Компонента скорости поперек силовых линий при известном поле $\vec{v}^{(0)}(\vec{r}, t)$ однозначно определяется из уравнения вращаемости (7.1.8) всегда, включая начальный момент.

В любой момент времени t из уравнения (7.1.5) и граничного условия (7.1.6) находим магнитное поле $\vec{v}^{(0)}(\vec{r}, t)$. Затем из уравнения (7.1.7) и (7.1.8) и начального условия (7.1.10) определяем скорость $\vec{v}^{(0)}(\vec{r}, t)$, а из уравнения непрерывности (7.1.9) и начального условия (7.1.11) находим распределение плотности плазмы $\rho^{(0)}(\vec{r}, t)$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением нулевого порядка по малому параметру ϵ^2 , пренебрегая отклонением магнитного поля от бескилового (потенциального). Можно, однако, видеть, что последовательное применение разложения (7.1.4) к системе уравнений (7.1.1) - (7.1.3) позволяет получить замкнутую систему уравнений для определения магнитогидродинамических величин в любом порядке

9*

131

по ϵ^2 . Важно, однако, другое. Практика показывает, что при решении задачи в нулевом порядке по ϵ^2 , как правило, появляются области, где нельзя пренебрегать градиентом газового давления. Здесь необходимо учитывать эффекты, пропорциональные малому параметру ϵ^2 (см. § 6.3). Этот факт обычно накладывает ограничение на применимость приближения сильного поля и холодной плазмы.

Вопрос о существовании решений уравнений магнитной гидродинамики в этом приближении будет рассмотрен в следующем параграфе на примере двумерных задач.

§ 7.2 Формализм двумерных задач магнитной гидродинамики

При относительной математической простоте двумерные задачи магнитной гидродинамики позволяют выяснить основные закономерности течений плазмы с вращающимся сильным магнитным полем. Кроме того, двумерные задачи в некоторых случаях оказываются хорошим приближением для описания реальных трехмерных течений и могут служить не только для качественных, но и для количественных сопоставлений теории с экспериментом и наблюдениями.

Возможны два типа магнитогидродинамических задач, рассматриваемых плоские (двумерные) течения плазмы, т.е. течения с полами скоростей, имеющим вид

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x(x, y, t), & v_y(x, y, t), & 0 \end{cases} \quad (7.2.1)$$

К первому из них относятся задачи с магнитным полем, которое всегда параллельно оси z декартовой системы координат. Соответствующая система токов, очевидно, параллельна плоскости (x, y). При этом все величины зависят только от переменных x, y и t:

$$\vec{v} = \begin{cases} 0, & 0, & v(x, y, t) \end{cases} \quad (7.2.2)$$

$$\vec{j} = \begin{cases} j_x(x, y, t), & j_y(x, y, t), & 0 \end{cases} \quad (7.2.3)$$

В качестве примера двумерной магнитогидродинамической задачи первого типа можно рассмотреть эффект продольного магнитного поля в токовых слоях на Солнце. В реальных условиях на Солнце магнитное пересоединение осуществляется не на нулевых линиях

магнитного поля (см. § 2.4), а на "пределных силовых линиях" или "сепараторах". Последние отличаются от нулевых линий тем, что имеют продольную компоненту магнитного поля (рис. 7.2.1). На двумерное гиперболическое поле в плоскости (x, y) наложено продольное магнитное поле v_1 , параллельное оси z (ср. рис. 2.4.2).

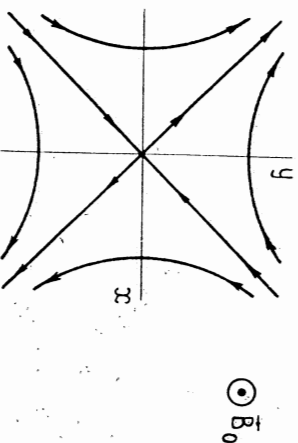


Рис. 7.2.1. Структура магнитного поля в окрестности сепаратора

С появлением продольного поля изменяется, прежде всего, баланс сил в токовом слое, который формируется на сепараторе. Давление поля и плазмы вне слоя должно в этом случае уравновешивать не только газовое, но и магнитное давление продольного поля внутри слоя (рис. 7.2.2)

$$\vec{v}_1 = \begin{cases} 0, & 0, & v_1(x, y, t) \end{cases} \quad (7.2.4)$$

Если продольное поле в процессе пересоединения накатывается в слое, то его давление $v_1^2/8\pi$ может существенно ограничивать сжатие токового слоя, а вместе с тем и скорость пересоединения. Однако, как показывает решение двумерной задачи первого типа по отношению к v_1 [102], в реальной плазме с конечной проводимостью важен и другой эффект. Суть его заключается в том, что сжатие продольного поля в токовом слое создает градиент этого поля и соответствующий электрический ток, циркулирующий в поперечной (по отношению к основному току j_z в слое) плоскости (x, y). Циркуляция этого тока типа (7.2.3) схематически показана

на рис. 7.2.2. Омическая диссипация тока в условиях конечной проводимости приводит к диффузии продольного поля наружу из слоя, ограничивая таким образом накопление продольного поля в слое.

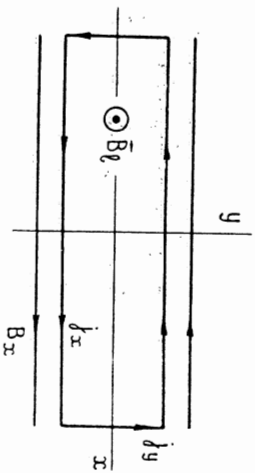


Рис. 7.2.2. Модель пересоединяющего токового слоя с продольным магнитным полем V_1

В дальнейшем нас будут интересовать в основном задачи этого типа. В них рассматриваются плоские течения плазмы (7.2.1), связанные с плоским магнитным полем

$$\vec{V} = \left\{ V_x(x, y, t), V_y(x, y, t), 0 \right\}. \quad (7.2.5)$$

Соответствующие этому полю токи параллельны оси z

$$\vec{j} = \left\{ 0, 0, j(x, y, t) \right\}. \quad (7.2.6)$$

Векторный потенциал A такого поля ($\vec{V} = \text{rot } A$) имеет только одну, отличную от нуля, z -компоненту

$$A = \left\{ 0, 0, A(x, y, t) \right\}. \quad (7.2.7)$$

Вектор напряженности магнитного поля \vec{V} выражается через нее по определению

$$\vec{V} = \left\{ \partial A / \partial y, -\partial A / \partial x, 0 \right\}. \quad (7.2.8)$$

Функцию $A(x, y, t)$ будем называть вектор-потенциалом. Он весьма удобен благодаря следующим четырем свойствам.

1. Подставим (7.2.8) в дифференциальные уравнения, которые описывают силовые линии магнитного поля

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}. \quad (7.2.9)$$

Действительно, уравнение (7.2.9) означают параллельность вектора $d\vec{l} = \{ dx, dy, dz \}$ вектору $\vec{V} = \{ V_x, V_y, V_z \}$. В рассматриваемом случае $V_z = 0$, $dz = 0$, и

$$\frac{dx}{\frac{\partial A}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial A}{\partial x}}$$

или

$$\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 0.$$

Проинтегрировав последнее, приходим к выводу, что соотношение

$$A(x, y, z) = \text{const} \quad \text{при} \quad t = \text{const} \quad (7.2.10)$$

является уравнением семейства силовых линий в момент времени t в плоскости $z = \text{const}$.

2. Пусть L - некоторая кривая в плоскости (x, y) , а $d\vec{l}$ - элемент дуги вдоль нее (рис. 7.2.3).

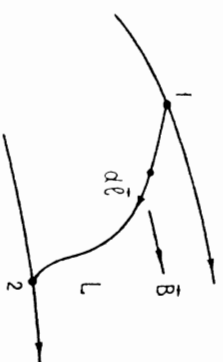


Рис. 7.2.3. Кривая L соединяет точки 1 и 2, расположенные на разных силовых линиях

Вычислим величину магнитного потока $d\Phi$ через элемент дуги $d\vec{l}$. По определению

$$d\Phi = \vec{V} \left[\begin{array}{ccc} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ dx & dy & dz \end{array} \right] =$$

$$= \mathbf{v} \left\{ (-dy) \mathbf{e}_x + dx \mathbf{e}_y \right\} = -V_x dy + V_y dx \quad (7.2.11)$$

Подставим (7.2.8) в (7.2.11), получим

$$d\Phi = -\frac{\partial A}{\partial y} dy - \frac{\partial A}{\partial x} dx = -dA \quad (7.2.12)$$

Принтегрировав (7.2.12) вдоль кривой L от точки 1 до точки 2, находим

$$\Phi = A_1 - A_2 \quad (7.2.13)$$

Таким образом, фиксированное значение вектор-потенциала A является не только "ярлычком" силовой линии (7.2.10): разность значений A на двух силовых линиях равна магнитному потоку между ними. Отсюда, в частности, следует правило - нужно строить силовые линии, которые соответствуют эквидистантным значениям A.

3. Подставим определение (7.2.8) в уравнение вихрежности (7.1.2). С точностью до несущественного здесь градиента произвольной функции, устраняемого калибровкой, получаем уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) A = \frac{dA}{dt} = 0 \quad (7.2.14)$$

Это уравнение означает, что поверхности

$$A(x, y, t) = \text{const} \quad (7.2.15)$$

являются лагранжидами, т.е. перемещаются вместе с плазмой. Поскольку они согласно (7.2.10) составлены из силовых линий, уравнение (7.2.14) выражает вмерзновенность магнитного поля в плазму. Отсюда (формально из (7.2.14) при переходе к лагранжидам перемещения) получаем один из интегралов движения

$$A(x, y, z) = A(x_0, y_0, 0) \equiv A_0 \quad (7.2.16)$$

При любых t. Здесь x_0, y_0 - координаты некоторой "жидкой частички" в начальный момент времени; x, y - координаты той же частички, находящейся в момент времени t на той же силовой линии A_0 .

4. Уравнение движения (7.1.1), переписанное в терминах вектор-потенциала $A(x, y, t)$, имеет вид

$$\epsilon^2 \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} = -\frac{1}{\rho} \nabla \Delta \mathbf{v} \quad (7.2.17)$$

В нулевом порядке по ϵ^2 , вне нулевых точек (где $\mathbf{v} \Delta = 0$) и вне источников магнитного поля (где $\Delta A = 0$)

$$\Delta A = 0, \quad (7.2.18)$$

т.е. вектор-потенциал является функцией гармонической от переменных x и y. Поэтому, рассматривая плоскость (x, y) как комплексную плоскость $z = x + iy$, удобно сопоставить вектор-потенциалу A аналитическую в рассматриваемой области функцию

$$F(z, t) = A(x, y, t) + i A^+(x, y, t) \quad (7.2.19)$$

Здесь $A^+(x, y, t)$ - сопряженная гармоническая функция, связанная с $A(x, y, t)$ условием Коши-Римана

$$A^+(x, y, t) = \int \left(-\frac{\partial A}{\partial y} dx - \frac{\partial A}{\partial x} dy \right) + A^+(t) = -\int \mathbf{v} d\mathbf{l} + A^+(t), \quad (7.2.20)$$

где $A^+(t)$ - величина, не зависящая от x и y [27].

Будем называть функцию $F(z, t)$ комплексным потенциалом. Вектор напряженности магнитного поля согласно (7.2.8) и (7.2.19) равен

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + i \mathbf{v}_y = -i \left(\frac{dF}{dz} \right)^* \quad (7.2.21)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Введение комплексного потенциала $F(z, t)$ позволяет широко использовать методы теории функций комплексного переменного, в частности метод конформных отображений, для определения магнитного поля в нулевом порядке по ϵ^2 .

Кинематика движения плазмы, обусловленного изменениями дугерного потенциального поля, в приближении сильного поля и холодной плазмы однозначно определяется двумя условиями: ортогональностью ускорения к силовым линиям магнитного поля

$$\left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]_{\perp} = 0 \quad (7.2.22)$$

(сравни с (7.1.7)) и условием вмерженности (7.2.14). Отметим, что уравнение (7.2.22) является результатом исключения неизвестной $\Delta A^{(1)}$ первого порядка по ϵ^2 из двух компонент векторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{u}^{(0)}}{dt} = - \frac{1}{\rho^{(0)}} \Delta A^{(1)} \quad \mathbf{v} A^{(0)} \quad (7.2.23)$$

Если кинематическая часть задачи решена, то известны траектории "жидких частиц" или, как их еще называют, "материальных точек"

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_0, y_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, t) \quad (7.2.24)$$

В этом случае решение уравнения непрерывности (7.1.3) не представляет принципиальных трудностей. Действительно, изменение плотности жидкой частицы при движении вдоль найденной траектории определяется уравнением непрерывности (7.1.3), переписанном в лагранжевой форме, и равно

$$\frac{\rho(\mathbf{x}, y, t)}{\rho_0(x_0, y_0, t)} = \frac{dV_0}{dV} = \frac{D(x_0, y_0)}{D(\mathbf{x}, y)} \quad (7.2.25)$$

Здесь dV_0 - начальный объем жидкой частицы, dV - объем той же частицы в момент времени t ;

$$\frac{D(x_0, y_0)}{D(\mathbf{x}, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x} & \frac{\partial x_0}{\partial y} \\ \frac{\partial y_0}{\partial x} & \frac{\partial y_0}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (7.2.26)$$

- якобиан преобразования, обратного к (7.2.24) при фиксированном значении t .

§ 7.3. О существовании непрерывных течений

Итак, в приближении сильного поля и холодной плазмы уравнения магнитной гидродинамики для плоского двумерного течения идеально проводящей плазмы, в задачах второго типа, сводятся в нулевом порядке по малому параметру ϵ^2 к следующей системе уравнений:

$$\Delta A = 0, \quad (7.3.1)$$

$$\left[\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{v} A \right] = 0, \quad (7.3.2)$$

$$\frac{dA}{dt} = 0, \quad (7.3.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0. \quad (7.3.4)$$

Казалось бы, решение этой системы полностью определено внутри некоторой области G на плоскости (x, y) , если заданы граничные условия на границе S

$$A(\mathbf{x}, y, t) \Big|_S = f_1(\mathbf{x}, y, t), \quad (7.3.5)$$

и начальные условия внутри области G

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, y, 0) = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, y), \quad (7.3.6)$$

$$\rho(\mathbf{x}, y, 0) = f_3(\mathbf{x}, y). \quad (7.3.7)$$

Здесь $\mathbf{v}^{(1)}$ - компонента скорости вдоль силовых линий. Поперечная компонента скорости при известном потенциале $A(\mathbf{x}, y, t)$ однозначно определяется из уравнения вмерженности (7.3.3) и равна всегда, включая начальный момент,

$$\mathbf{v}_\perp = (\mathbf{v} \nabla A) \times \nabla A / |\nabla A|^2 = - \frac{\partial A}{\partial t} \nabla A \times \nabla A / |\nabla A|^2. \quad (7.3.8)$$

В любой момент времени из уравнения (7.3.1) и граничного условия (7.3.5) находим вектор-потенциал $A(\mathbf{x}, y, t)$. Затем из уравнений (7.3.2) и (7.3.3) и начального условия (7.3.6) определяем скорость $\mathbf{v}(\mathbf{x}, y, t)$, а из уравнения непрерывности (7.3.4) и начального распределения плотности (7.3.7) находим $\rho(\mathbf{x}, y, t)$.

Однако такая процедура возможна не всегда. Это означает, что непрерывные решения системы уравнений (7.3.1) - (7.3.4) существуют не всегда. Пусть заданы граничные и начальные условия задачи. Вектор-потенциал $A(x, y, t)$ однозначно определяется уравнением (7.3.1) и граничным условием (7.3.5). Однако последнее в общем случае может быть таким, что соответствующее потенциалу A магнитное поле в будет содержать нулевые точки

$$\mathbf{B} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial x}, -\frac{\partial A}{\partial y}, 0 \right\} = 0. \quad (7.3.9)$$

Среди этих точек могут быть такие, в которых отлочно от нуля электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} * 0. \quad (7.3.10)$$

Заметим, что такие точки противоречат уравнению замороженности (7.3.3). Для краткости будем называть их особыми.

Условие замороженности допускает непрерывную деформацию сильного магнитного поля и соответствующее ей непрерывное движение плазмы всяду, кроме особых нулевых точек (линий, параллельных оси z декартовой системы координат), в которых магнитное поле обращается в нуль, а электрическое поле отлочно от нуля.

Заметим, что одновременное обращение в нуль обоих полей весьма маловероятно. Поэтому особые нулевые точки магнитного поля встречаются довольно часто. Им будет уделено немало внимания в дальнейшем. Однако сначала рассмотрим простой пример непрерывного течения плазмы в сильном магнитном поле, не содержащем особых нулевых точек. Этому примеру, имеющему интересны астрофизические приложения, посвящен следующий параграф.

§ 7.4. Течения плазмы в поле изменяющегося во времени магнитного диполя

Два прямых параллельных тока, одинаковых по величине, но противоположных по направлению, создают магнитное поле, которое на достаточном удалении от них может быть описано комплексным потенциалом вида

$$F(z) = \frac{im}{z}, \quad m = m e^{i\psi} \quad (7.4.1)$$

и названо плоским дипольным магнитным полем или полем плоского магнитного диполя. Величина $m = 2 I l / c$ имеет смысл дипольного момента, I - величина токов, а l - расстояние между ними. Формуле (7.4.1) соответствует плоский магнитный диполь, расположенный в начале координат в плоскости (x, y) и направленный под углом ψ к оси x ; токи параллельны оси z декартовой системы координат.

Рассмотрим течение плазмы, обусловленное изменением во времени замороженного в плазму сильного магнитного поля плоского диполя. Пусть $\psi = \pi/2$, а $m = m(t)$.

Компоненты вектора напряженности магнитного поля, согласно (7.2.21) имеют вид

$$\mathbf{B} = \left\{ \frac{2 m x y}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{m (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, 0 \right\}, \quad (7.4.2)$$

а силовые линии представляют собой согласно (7.2.15) и (7.4.1) семейство окружностей

$$\frac{m x}{x^2 + y^2} = \text{const} \quad (7.4.3)$$

с центрами на оси x и общей точкой $x = 0$, $y = 0$ (см. рис. 7.4.1). Соответственно условие замороженности (7.2.16) приводит к первому интегралу движения в виде

$$\frac{m x}{x^2 + y^2} = \frac{m_0 x_0}{x_0^2 + y_0^2}. \quad (7.4.4)$$

Здесь x_0, y_0 - координаты некоторой "жидкой частицы" в начальный момент времени $t = 0$; x, y - координаты той же частицы в момент времени t . Дипольный момент рассматривается как функция времени, причем $m(0) = m_0$.

Второй интеграл движения легко найти, если ограничиться малыми изменениями дипольного момента $m(t)$ и соответственно малыми смещениями плазмы. Считая параметр $\delta = v \tau / l$ малым, воспользуемся вместо уравнения (7.2.22) линейным по скорости уравнением (6.3.26), которое после интегрирования по времени с нулевыми начальными значениями для скорости в случае плоского дипольного магнитного поля, сохраняющего свою форму в пространстве, приводится к виду (сравни с (7.2.23))

$$\frac{\partial x}{\partial t} = K(x, y, t) \frac{\partial A}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = K(x, y, t) \frac{\partial A}{\partial y}. \quad (7.4.5)$$

Здесь $K(x, y, t)$ — некоторая функция координат и времени, исходящая от уравнения (7.4.5), приходим к уравнению

$$-\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial A}{\partial y} / \frac{\partial A}{\partial x} \right). \quad (7.4.6)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении не только ускорение, но и смещения плазмы направлены всюду по нормали к силовым линиям

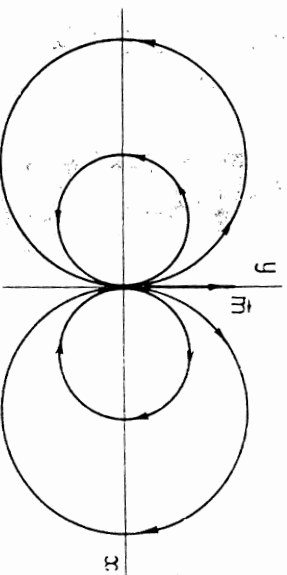


Рис. 7.4.1. Силовые линии плоского магнитного диполя

Подставив (7.4.2) в (7.4.6), получаем простое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}. \quad (7.4.7)$$

Его интеграл

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \text{const} \quad (7.4.8)$$

описывает семейство окружностей ортогональных к силовым линиям, и представляет собой траектории жидких частиц. В частности, траектория жидкой частицы, находившейся в начальный момент времени $t = 0$ в точке (x_0, y_0) , представляет собой дугу окружности

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \quad (7.4.9)$$

от точки (x_0, y_0) до точки (x, y) на силовой линии (7.4.4).

142

Итак, интегралы движения (7.4.4) и (7.4.9) полностью определяют течение плазмы в терминах лагранжевых координат

$$x = x(x_0, y_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, t). \quad (7.4.10)$$

Это течение имеет простой вид: жидкие частицы связаны с силовыми линиями и смещаются вместе с ними в поперечном направлении. Разумеется, такая простая кинематика является результатом того, рассматриваются малые смещения плазмы из состояния с нулевой начальной скоростью под действием сил, перпендикулярной к силовым линиям магнитного поля.

Изменение плотности плазмы определяется уравнением (7.2.25). Вычисляя в нем якобиан для преобразования, заданного в неявном виде (7.4.4) и (7.4.9), получим в случае однородного начального распределения плотности ρ_0 следующую формулу

$$\begin{aligned} \rho(x, y, t) = & \left(\frac{m}{m_0} \right)^4 \frac{m_0^4}{(m^2 x^2 + m_0^2 y^2)^4} \left\{ [m^2 x^4 + m_0^2 y^4 + \right. \\ & \left. + x^2 y^2 (3m^2 - m_0^2)]^2 - [2x^2 y^2 (m_0^2 - m^2)]^2 \right\}. \quad (7.4.11) \end{aligned}$$

В частности, на оси диполя ($x = 0$) имеем

$$\frac{\rho(0, y, t)}{\rho_0} = \frac{m}{m_0}, \quad (7.4.12)$$

а в "экваториальной" плоскости ($y = 0$)

$$\frac{\rho(x, 0, t)}{\rho_0} = \left(\frac{m}{m_0} \right)^3. \quad (7.4.13)$$

Таким образом, при увеличении дипольного момента m плотность плазмы на оси диполя растет пропорционально моменту, а в экваториальной плоскости падает обратно пропорционально его третьей степени. При уменьшении дипольного момента имеет место обратный процесс.

Полученный результат относится к случаю малых изменений дипольного момента и может демонстрировать лишь тенденцию поведения плазмы в сильном магнитном поле плоского диполя. Исключением является формула (7.4.12). Она применима для любых изменений дипольного момента. Дело в том, что, как уже отмечалось, в прибли-

143

жения сильного поля и холодной плазмы ускорение перпендикулярно силовым линиям. На оси диполя оно равно нулю. Поэтому, если в начальный момент времени плазма покоилась, то на оси диполя движение не возникнет ни при каких изменениях дипольного момента ($v = 0$), а в окрестности оси диполя смещения плазмы всегда остаются малыми ($\delta \ll 1$), и применимо полученное решение.

В общем случае сколь угодно больших изменений дипольного момента существенную роль играют инерционные эффекты, приводящие к течению плазмы вдоль силовых линий [55]. Решение задачи в этом случае требует интегрирования уравнения (7.2.22) или (7.2.23) совместно с уравнением вмерзности (7.2.14).

Для линейно изменяющегося магнитного момента можно получить точные аналитические решения, используя технику "вмороженных координат" (Горбачев В.С., Кельнер С.Р., 1988). Эти координаты могут быть весьма полезны при решении нестационарных задач магнитной гидродинамики. Вводится дважды лагранжева система: попарно между вдоль линии тока течения (вдоль поля скорости v) и поперек ее вдоль магнитной силовой линии.

Для конкретных приложений рассмотренной плоской задачи второго типа к астрофизическим условиям лучше подходят двумерные осесимметричные задачи. В приближении сильного поля и холодной плазмы магнитогидродинамические уравнения записываются в сферических координатах r, θ, φ с учетом осевой симметрии. Роль вектор-потенциала при этом играет так называемая "функция тока"

$$\Phi(r, \theta, t) = r \sin \theta A_\varphi(r, \theta, t). \quad (7.4.14)$$

Здесь A_φ есть единственная отличная от нуля φ -ая компонента векторного потенциала A .

Записанные в терминах функции тока уравнения имеют вид

$$e^2 \frac{dv}{dt} = K(r, \theta, t) \nabla \Phi, \quad (7.4.15)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad (7.4.16)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} v, \quad (7.4.17)$$

$$K(r, \theta, t) = j_\varphi(r, \theta, t) / r \sin \theta \quad (7.4.18)$$

где

144

(подробнее в [56]). Они формально совпадают с соответствующими им уравнениями (7.2.17), (7.2.14) и (7.1.3), описывающими плоские течения плазмы в терминах вектор-потенциала. Это позволяет получить в § 7.3 условие существования непрерывных решений на случай течений плазмы в осесимметричном *полудипольном* ($V_\varphi = 0$) поле. А именно, возможна непрерывная деформация сильного осесимметричного *полудипольного* поля и соответствующее ей непрерывное (*полудипольное* или *меридианальное*) движение плазмы всюду, кроме особых нулевых точек магнитного поля, т.е. точек, в которых

$$V_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\sin \theta \partial \theta} = 0, \quad (7.4.19)$$

$$V_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad (7.4.20)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Phi(r, \theta, t)}{r \sin \theta} \right) \neq 0. \quad (7.4.21)$$

Таким образом, имеем основание предполагать существование непрерывного течения плазмы в сильном магнитном поле дипольного типа, в котором таких точек заведомо нет.

Следовательно, в качестве магнитного поля нулевого по e^2 приближения можно взять, например, дипольное магнитное поле. Для него функция тока имеет вид

$$\Phi^{(0)}(r, \theta, t) = m(t) \sin^2 \theta / r, \quad (7.4.22)$$

где $m(t)$ - изменяющийся во времени магнитный момент.

Представим себе однородно немагнитный газовый шар радиуса $R(t)$ с вмороженным внутренним магнитным полем $V_1(t)$. Дипольный магнитный момент такого шара (например, звезды)

$$m(t) = \frac{1}{2} V_1(t) R^3(t) = \frac{1}{2} V_0 R_0^2 R(t), \quad (7.4.23)$$

где V_0 и R_0 - значения $V_1(t)$ и $R(t)$ в начальный момент времени $t = 0$. В (7.4.23) во втором равенстве вмороженность магнитного поля учтена в виде сохранения магнитного потока $V_1(t) R^2(t)$ через шар. Формула (7.4.23) показывает, что при этом дипольный магнитный момент шара пропорционален его радиусу $R(t)$.

10 Зак. 4360

145

численное решение задачи [55] показывает, что при увеличении дипольного момента (при расширении шара) магнитное поле "стребает" плазму к оси диполя, сжимает ее и одновременно уско-ряет вдоль силовых линий. Характерно, что плотность плазмы на оси диполя, как и в двумерном случае (см. (7.4.12)), растет пропорционально величине дипольного момента. Рассмотрим одно из астрофизических приложений задачи.

Известно, что формы облобочек новых и сверхновых звезд, а также формы планетарных туманностей отличаются большим разнообразием. Даже среди облобочек правильной формы редко можно встретить идеально круглые. Чаще встречаются сплюснутые или вытянутые осесимметричные облобочки. Их поверхностьная яркость, как правило, максимална на концах одной из главных осей наблюдаемого овального изображения. В ряде случаев это явление можно интерпретировать как светящееся газовое кольцо, наблюдаемое почти с ребра. Однако если между максимумами яркости нет характерного для кольца светящегося пояса, остается предположить существование в облобочке отдельных газовых уплотнений - конденсаций.

В явлении взрыва новых на ранних стадиях расширения облобочки газовые конденсации иногда достигали такой яркости, что создавалось впечатление "раздробения" новой в момент взрыва. Существуют различные модели образования газовых конденсаций. Рассмотрим одну из них - модель, в которой магнитное поле играет определяющую "активную" роль.

Предположим, что магнитное поле звезды до взрыва было дипольным. В момент взрыва от звезды отделилась и стала расширяться массивная оболочка с замороженным в нее магнитным полем. Согласно формуле (7.4.23) расширение облобочки приводит к росту ее магнитного, дипольного момента. Согласно решению задачи, рассмотренной выше, магнитное поле будет стребать окружающую облобочку межзвездную плазму и внешние слои облобочки, для которых примерно приближение сильного поля, в направлении к оси диполя.

Процесс формирования полярной конденсации в такой модели можно условно разбить на две стадии [56]. На первой из них происходит сгребание межзвездной плазмы (и внешних слоев облобочки, в которых магнитное поле можно рассматривать как сильное) полем в полярные области с ростом плотности и давления на оси диполя. На второй стадии возросшее газовое давление препятствует увеличению плотности плазмы на полярной оси, останавливает сжатие, но сгребание плазмы все еще продолжается. Одновременно возникающий

вперед облобочки градиент газового давления приводит к движению плазмы вдоль полярной оси, в результате чего к моменту прекращения действия магнитных сил вся плазма стребается в две компактные конденсации.

Сгребание плазмы сильным магнитным полем дипольного типа, по-видимому, может объяснить образование некоторых типов хромосферных выбросов на Солнце, а также начальную стадию формирования корональных конденсаций ([56], Глава 2, § 4).

Отметим в заключение, что если намагниченный шар сжимается, то плазма должна течь от полюсов к экваториальной плоскости, образуя в ней плотный диск или кольцо. Этот случай интересен в связи со старой проблемой космической электродинамики - задачей о сжатии гравитирующей облака плазмы с замороженным магнитным полем. Процесс магнитного сгребания плазмы в плотные диски или кольца должен эффективно работать в атмосферах коллапсирующих звезд.

ВОЛНЫ И РАЗРЫВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

§ 8.1. Волны малой амплитуды

Малые возмущения в проводящей среде с магнитным полем распространяются в виде волн, свойства которых отличаются от свойств обычных звуковых или электромагнитных волн. Во-первых, проводящая среда с магнитным полем обладает характерной анизотропией: скорость распространения волн зависит от направления распространения по отношению к магнитному полю. Во-вторых, в результате взаимодействия электромагнитных и гидродинамических явлений, в магнитной гидродинамике волны в общем случае не являются ни продольными, ни поперечными.

Помимо самостоятельного значения изучение поведения волн малой амплитуды имеет непосредственное отношение к анализу волн большой амплитуды, в частности, ударных волн, и других разрывных течений в магнитной гидродинамике.

Возможные типы волн малой амплитуды в магнитной гидродинамике начнем изучать, ограничиваясь приближением идеальной среды, т.е. уравнениями (6.2.14) - (6.2.19) или (6.2.20) - (6.2.25). Предположим, что исходное стационарное состояние среды подвергается малому возмущению, в результате которого скорость v_0 , напряженность магнитного поля B_0 , плотность ρ_0 , давление p_0 и энтропия s_0 приобретают малые отклонения v' , B' , ρ' , p' и s' соответственно

$$\begin{aligned} v &= v_0 + v', & B &= B_0 + B', \\ \rho &= \rho_0 + \rho', & p &= p_0 + p', \\ s &= s_0 + s'. \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

В качестве начального состояния возьмем однородное течение однородной среды в постоянном магнитном поле

$$v_0 = \text{const}, \quad B_0 = \text{const}, \quad \rho_0 = \text{const},$$

$$p_0 = \text{const}, \quad s_0 = \text{const}. \quad (8.1.2)$$

Разумеется, последнее упрощение можно не принимать, т.е. изучать волны в неоднородных средах. При этом коэффициенты в линеаризованных уравнениях будут зависеть от координат. Для простоты ограничимся случаем (8.1.2).

Для дальнейшего удобно ввести обозначения

$$u = \frac{v_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad u' = \frac{B'}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \quad (8.1.3)$$

Линеаризуем исходную систему уравнений магнитной гидродинамики идеальной среды. Для этого подставим (8.1.1) - (8.1.3) в систему уравнений (6.2.14) - (6.2.19), пренебрежем произведением малых величин. Индекс "0" для невозмущенных величин в дальнейшем писать не будем. Получим следующую систему линейных уравнений для штрихованных величин, характеризующих малые возмущения:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (v \cdot \nabla) u' = (u \cdot \nabla) v' - u \operatorname{div} v', \quad (8.1.4)$$

$$\operatorname{div} u' = 0, \quad (8.1.5)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v' = -\frac{1}{\rho} \nabla (p' + \rho u \cdot u'), \quad (8.1.6)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + (v \cdot \nabla) p' = -\rho \operatorname{div} v', \quad (8.1.7)$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + (v \cdot \nabla) s' = 0, \quad (8.1.8)$$

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \rho' + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho s'. \quad (8.1.9)$$

Последнее уравнение представляет собой линеаризованное уравнение состояния. Перепишем его так:

$$p' = \sqrt{\gamma} \rho' + \delta s'. \quad (8.1.10)$$

$$V_S = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S^{1/2} \quad (8.1.11)$$

есть скорость звука в среде в отсутствие магнитного поля, а коэффициент $b = (\partial p / \partial s)_p$.

Система уравнений (8.1.4) - (8.1.9) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными (в силу (8.1.2) коэффициентами. Поэтому ее решение можно искать в виде суперпозиции плоских волн с зависимостью от координат и времени типа

$$\exp [i(kx - \omega t)], \quad (8.1.12)$$

где ω - частота волны, а k - волновой вектор. Любое возмущение может быть разложено в интеграл Фурье по таким волнам. При этом система уравнений (8.1.4) - (8.1.9) сводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$(\omega - k v) u + (k u) v - u (k v) = 0, \quad (8.1.13)$$

$$k u = 0, \quad (8.1.14)$$

$$(\omega - k v) v + (k u) u - \frac{1}{\rho} (\rho' + \rho u u) k = 0, \quad (8.1.15)$$

$$(\omega - k v) \rho' - \rho (k v) = 0, \quad (8.1.16)$$

$$(\omega - k v) s = 0, \quad (8.1.17)$$

$$\rho' - V_S \rho' - b s' = 0. \quad (8.1.18)$$

Входящие в эту систему уравнения величины k и ω являются заданными, ибо предполагаются заданными начальные величины. Неизвестными являются штрихованные переменные. По отношению к ним система уравнений (8.1.13) - (8.1.18) замкнутая, линейная, однородная. Для того, чтобы она имела нетривиальные решения, необходимо приравнять к нулю ее детерминант.

Удобно вычислять этот детерминант в системе координат, одна из осей которой направлена вдоль волнового вектора k . Кроме того, удобно ввести частоту

$$\omega_0 = \omega - k v, \quad (8.1.19)$$

т. е. частоту в системе координат, связанной с движущейся средой. Приравнивая детерминант к нулю, получим следующие уравнение:

$$\omega_0^2 \left[\omega_0^2 - (k u)^2 \right] \left[\omega_0^4 - k^2 (V_S + u)^2 \omega_0^2 - k^2 V_S^2 (k u)^2 \right] = 0. \quad (8.1.20)$$

Это уравнение называется дисперсионным или характеристическим. Оно определяет четыре различных по абсолютной величине значения ω_0 и, следовательно, четыре различных волны, каждая из которых обладает своей скоростью распространения относительно среды

$$V_{ph} = \frac{\omega_0}{k}. \quad (8.1.21)$$

Эта скорость есть, очевидно, фазовая скорость волны, т. е. скорость распространения поверхности постоянной фазы. Ее следует отличать от групповой скорости

$$V_{gr} = \frac{d\omega_0}{dk}, \quad (8.1.22)$$

которая представляет собой скорость распространения энергии.

Рассмотрим подробнее свойства волн, определяемых дисперсионным уравнением (8.1.20).

(1) Первый корень дисперсионного уравнения (8.1.20)

$$\omega_0 = \omega - k v = 0, \quad (8.1.23)$$

соответствует возмущению, неподвижному относительно среды

$$v_{ph} = 0. \quad (8.1.24)$$

Если среда движется, то возмущение переносится вместе с ней.

Подставляя (8.1.23) в систему линейных уравнений (8.1.13) - (8.1.18), получим соответственно

$$(k u) v - u (k v) = 0, \quad (8.1.25)$$

$$\vec{k} \vec{u} = 0, \quad (8.1.26)$$

$$(\vec{k} \vec{u}) \vec{u} - \frac{1}{\rho} (\rho' + \rho \vec{u} \vec{u}) \vec{k} = 0, \quad (8.1.27)$$

$$\vec{k} \vec{v} = 0, \quad (8.1.28)$$

$$\rho' - V_S^2 \rho' - b s' = 0. \quad (8.1.29)$$

В уравнении (8.1.25) учтем (8.1.28). Умножим уравнение (8.1.27) скалярно на вектор \vec{k} и учтем (8.1.26). Получим

$$(\vec{k} \vec{u}) \vec{v} = 0, \quad (8.1.30)$$

$$\vec{k} \vec{u} = 0, \quad (8.1.31)$$

$$\rho' + \rho \vec{u} \vec{u} = 0, \quad (8.1.32)$$

$$\vec{k} \vec{v} = 0, \quad (8.1.33)$$

$$\rho' - V_S^2 \rho' - b s' = 0. \quad (8.1.34)$$

Подставляя (8.1.32) в (8.1.27), получаем

$$(\vec{k} \vec{u}) \vec{u} = 0, \quad (8.1.35)$$

$$(\vec{k} \vec{u}) \vec{v} = 0, \quad (8.1.36)$$

$$\rho' + \rho \vec{u} \vec{u} = 0, \quad (8.1.37)$$

$$\rho' - V_S^2 \rho' - b s' = 0. \quad (8.1.38)$$

Поскольку в общем случае $\vec{k} \vec{u} \neq 0$, невозмущенными оказываются в рассматриваемой волне скорость, магнитное поле и газовое давление

$$\vec{v}' = 0, \quad \vec{u}' = 0, \quad \rho' = 0. \quad (8.1.39)$$

В такой волне возмущены лишь плотность и энтропия, связанные ус-

ловием

$$\rho' = -\frac{b}{V_S^2} s'. \quad (8.1.40)$$

Отсюда происходит название этого типа волн *энтропийные*. Они хорошо известны в обычной гидродинамике. Смысл энтропийной волны в том, что в потоке плазмы могут быть области более горячие, но и более разреженные.

Энтропийные волны можно лишь условно называть волнами, поскольку их скорость распространения относительно среды равна нулю. Тем не менее в ряде случаев, например при исследовании поведения ударных волн при малых возмущениях, энтропийная волна должна учитываться наряду с рассматриваемыми ниже истинными волнами.

В обычной гидродинамике Елохинцев Д.И. [8] рассматривал прохождение малых возмущений через ударную волну. Он пришел к выводу, что для сшивки линеаризованных решений на фронте волны необходимо учитывать энтропийную волну.

(2) Второй корень дисперсионного уравнения (8.1.20)

$$\omega_0^2 = (\vec{k} \vec{u})^2 \quad \text{или} \quad \omega_0 = \pm (\vec{k} \vec{u}) \quad (8.1.41)$$

соответствует волнам, фазовая скорость которых

$$V_A = \pm \frac{V}{\sqrt{4\pi\rho}} \cos \theta, \quad (8.1.42)$$

где θ — угол между направлением распространения волны \vec{k}/k и вектором магнитного поля \vec{B} . Это — так называемые *альфвеновские* волны. Подставляя (8.1.41) в уравнения (8.1.13) — (8.1.18), можно убедиться, что в них остаются неизменными термодинамические характеристики среды

$$\rho' = 0, \quad \rho' = 0, \quad s' = 0, \quad (8.1.43)$$

а возмущения скорости и напряженности магнитного поля подчиняются условиям

$$\vec{v}' = \pm \vec{u}, \quad \vec{u} \vec{u} = 0, \quad \vec{k} \vec{u} = 0. \quad (8.1.44)$$

Таким образом, альфвеновские волны представляют собой смещения плазмы и вмороженного в нее магнитного поля, попеременно относительно направления поля и волнового вектора (рис. 8.1.1).

Альфвеновские волны не имеют аналога в обычной гидродинами-

ке. Они являются специфическими для магнитной гидродинамики, и иногда их называют магнитогидродинамическими. Это подчеркивает факт, что они не изменяют плотность среды. Поперечность альфвеновских волн означает, что проводящая среда в магнитном поле имеет своеобразную упругость по отношению к сдвигу соседних ее слоев, напоминающую упругость натянутых струн. В этом одна из специфических особенностей магнитной гидродинамики. В каждом таком смещении согласна (8.1.44)

$$\frac{\rho v' \cdot 2}{2} = \frac{B}{8\pi}$$

Длительно заметить также, что энергия колебания такого типа (подобно энергии колебания в натянутой струне) распространяется только вдоль магнитных силовых линий. В отличие от фазовой скорости (8.1.42) групповая скорость альфвеновских волн (см. (8.1.22))

$$V_{gr} = \frac{B}{4\pi\rho}$$

направлена строго по магнитному полю.

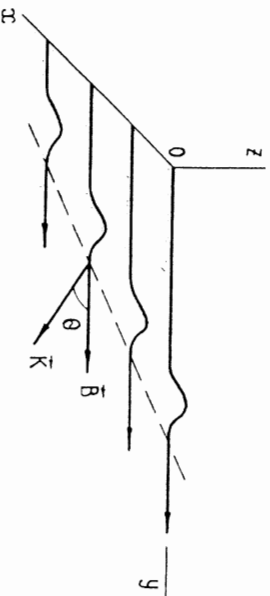


Рис. 8.1.1. Поперечные смещения плазмы и магнитного поля в альфвеновской волне

Открытие альфвеновских волн было важным этапом в становлении и развитии космической электродинамики.

(3) Дисперсионное уравнение (8.1.50) имеет еще две ветви - два типа волн, которые определяются биквадратным уравнением

$$\omega_0^4 - k^2 (u^2 + V_S^2) \omega_0^2 + k^2 V_S^2 (k u)^2 = 0 \quad (8.1.45)$$

Это решениями служат два различных по абсолютной величине значения ω_0 . Им соответствуют две различные волны, фазовые скорости которых V_+ и V_- определяются формулой

$$V_{\pm} = \frac{1}{2} \left[u^2 + V_S^2 \pm \sqrt{(u^2 + V_S^2)^2 - 4 u^2 V_S^2 \cos^2 \theta} \right] \quad (8.1.46)$$

Эти волны называются соответственно быстрой (+) и медленной (-) магнитоэвковая волна. Дело в том, что энтропия среды, как это следует из уравнений (8.1.13) - (8.1.18) при условии (8.1.45), в таких волнах не изменяется

$$s = 0, \quad (8.1.47)$$

как в обычной звуковой волне. Изменения остальных величин могут быть выражены через возмущения плотности

$$p' = V_S^2 p', \quad (8.1.48)$$

$$v' = -\frac{\omega_0}{\rho k} \left\{ \frac{k^2 (k u) u - \omega_0^2 k}{\omega_0^2 - (k u)^2} \right\} p, \quad (8.1.49)$$

$$u' = \frac{\omega_0^2}{\rho k} \left\{ \frac{k^2 u - (k u) k}{\omega_0^2 - (k u)^2} \right\} p \quad (8.1.50)$$

Формулы (8.1.49) и (8.1.50) показывают, что магнитоэвковие волны не являются ни продольными, ни поперечными. Возмущения скорости и напряженности магнитного поля v' и u' , в отличие от альфвеновской волны, лежат в плоскости (\vec{k} , \vec{B}) и имеют составляющие как в направлении распространения волны \vec{k}/k , так и в направлении \vec{B} , т.е. имеют составляющие, перпендикулярные к волновому вектору, если он не параллелен магнитному полю.

Заметим, что возмущение магнитного давления V^2/B_m может быть записано в виде (см. (8.1.3))

$$P_m' = \rho u u' = \left[\frac{V_{\pm}^2}{V_S^2} - 1 \right] p' \quad (8.1.51)$$

Следовательно, для быстрой волны, в силу того, что для нее $V_+^2 > V_S^2$, приращение магнитного давления P_m' имеет тот же знак, что и для приращения газового давления p' . Иными словами,

распространяется быстрее, поскольку больше эффективная упругость среды. Иная картина в медленной магнитозвуковой волне. Для нее $V_2 > V_S$, r'_m и r' имеют противоположные знаки и частично компенсируют друг друга.

Зависимость фазовых скоростей волн от угла θ между V и k можно наглядно представить на полярной диаграмме (рис. 8.1.2), где длина радиуса-вектора из начала координат до кривой пропорциональна соответствующей фазовой скорости. Горизонтальная ось соответствует направлению невозмущенного магнитного поля.

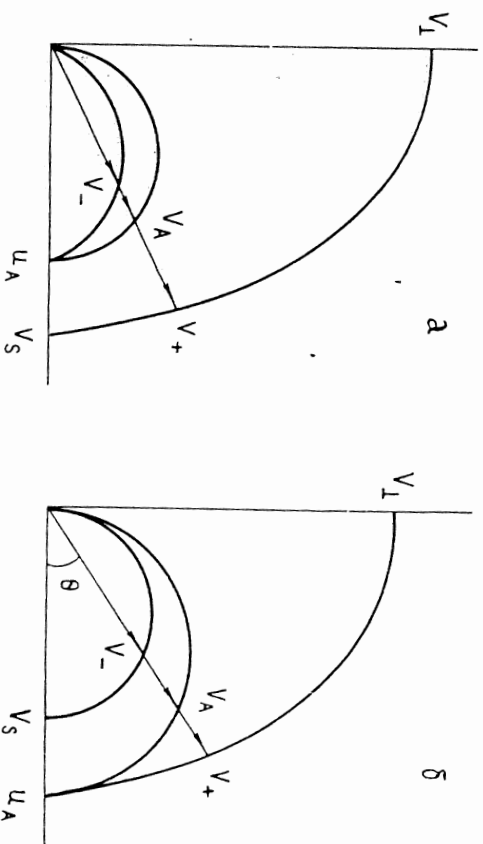


Рис. 8.1.2. фазовые скорости магнитогидродинамических волн в двух случаях: (а) $u_A < V_S$, и (б) $u_A > V_S$

При $\theta \rightarrow 0$ быстрая магнитозвуковая волна V_+ переходит в обычную звуковую V_S , если $V_S > u_A$, или в альфвеновскую, если $V_S < u_A$. При $\theta \rightarrow \pi/2$ скорость распространения альфвеновской и медленной волн обращается в нуль. При этом обе волны превращаются в так называемый *слабый магнитоциклонный разрыв*, в котором возмущения скорости и магнитного поля параллельны плоскости фронта. Скорость быстрой магнитозвуковой волны при $\theta \rightarrow \pi/2$ стремится к величине

$$V = \sqrt{u_A^2 + V_S^2} \quad (8.1.52)$$

в пределе сильного поля ($u_A^2 \gg V_S^2$) диаграмма фазовой скорости

для быстрой магнитозвуковой волны становится практически изо-тропной. Такую волну можно назвать *магнитным звуком*, поскольку вне зависимости от угла θ ее фазовая скорость $V_+ \approx u_A$ (см. рис. 8.1.3).

В отличие от обычной гидродинамики, где есть минимальная скорость, с которой распространяются малые возмущения, — скорость звука V_S , в магнитной гидродинамике такой минимальной скорости нет.

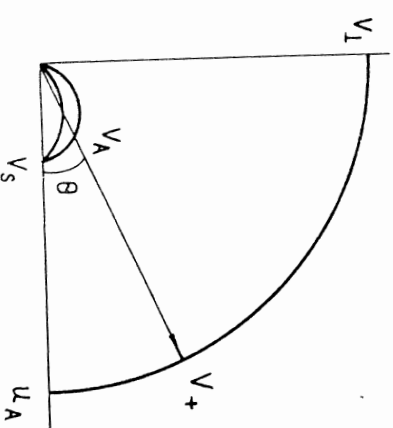


Рис. 8.1.3. фазовые скорости магнитогидродинамических волн малой амплитуды в пределе сильного поля

§ 8.2. Поверхности разрыва в гидродинамике

Вспомним, как образуются ударные волны в обычных гидродинамических средах без магнитного поля. Представим себе, что в трубу, заполненную газом, начинает двигаться поршень. Пусть скорость его увеличивается от нулевой небольшими скачками Δv . Как только поршень начнет двигаться, он будет сбегать газ и сжимать его. При этом передний край области сжатия побежит по невозмущенному газу внутри трубы со скоростью звука

$$V_S = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{1/2} \quad (8.2.1)$$

Каждый последующий импульс сжатия Δp будет распространяться в более плотной среде и поэтому с большей скоростью. Действительно, производная от скорости звука по плотности

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial p^2} \right) S}{2 \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right) S} \approx \sqrt{\gamma (\gamma - 1)} \rho \left(\frac{2}{\gamma} - \frac{2}{\gamma^2} \right) > 0, \quad (8.2.2)$$

поскольку для всех реальных веществ $\gamma > 1$ в адiabатическом процессе $p \sim \rho^\gamma$. Таким образом, $\partial V_S > 0$.

Как следствие этого факта, последовательные импульсы сжатия будут догонять друг друга (рис. 8.2.1а). В результате становится круче передней фронт области сжатия (рис. 8.2.1б). Градиенты параметров газа становятся столь большими, что описание его как гидродинамической среды (см. § 6.1) перестает быть применимым. Плотность, давление и скорость движения среды изменяется скачком на расстоянии, сравнимом с длиной свободного пробега частиц λ .

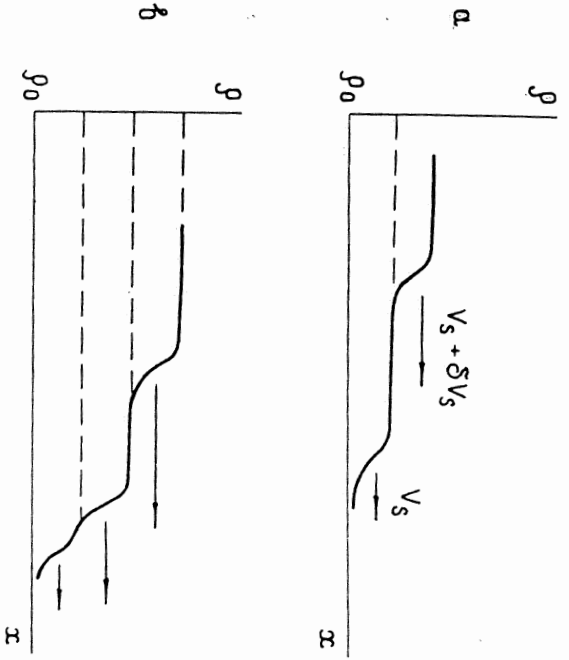


Рис. 8.2.1. Поведение малых возмущений впереди поршня

Физические процессы внутри такого скачка - в данном случае ударной волны - определяются кинематически являющимися в газе. С точки зрения гидродинамического приближения поверхность, на которой нарушается непрерывность гидродинамических параметров сре-

ди, представляет собой некоторую поверхность разрыва - разрывная решение уравнений гидродинамики. При этом, разумеется, на поверхности разрыва должны выполняться определенные граничные условия. Какими?

Перейдем в систему координат, связанную с поверхностью разрыва. Будем предполагать, что такая система движется с постоянной скоростью относительно среды. Если же, вообще говоря, течение газа является нестационарным в окрестности разрыва, то будем рассматривать поверхность разрыва в течение малого интервала времени, дабы пренебречь изменениями скорости и других гидродинамических величин со временем.

Чтобы формулировать граничные условия, рассмотрим элемент поверхности разрыва. Пусть ось x направлена по нормали к нему. Поток газа через такой элемент поверхности, отнесенный на единицу площади, должен сохраняться:

$$\rho_1 v_{x1} = \rho_2 v_{x2} \quad (8.2.3)$$

Здесь индексы 1 и 2 относятся к двум сторонам поверхности разрыва.

Разность значений какой-либо величины с обеих сторон поверхности разрыва будем обозначать в этой главе фигурными скобками, например,

$$\left\{ \rho v_x \right\} = \rho_1 v_{x1} - \rho_2 v_{x2} \quad (8.2.4)$$

Тогда условия (8.2.3) переписываются в виде

$$\left\{ \rho v_x \right\} = 0 \quad (8.2.5)$$

На поверхности разрыва должен быть непрерывным также поток энергии. Для гидродинамической среды без магнитного поля (см. с (6.2.26)) получаем следующее условие сохранения потока энергии:

$$\left\{ \rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right\} = 0 \quad (8.2.6)$$

Наконец, должен быть непрерывным поток импульса (см. с (6.2.27))

$$\left\{ p_{\alpha\beta} \right\} = p_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} + \rho v_{\alpha} v_{\beta}, \quad \alpha = x.$$

Непрерывность x -компоненты потока импульса означает

$$\left\{ p + \rho v_x^2 \right\} = 0, \quad (8.2.7)$$

а непрерывность y - и z -компонент дает два условия

$$\left\{ \rho v_x v_y \right\} = 0, \quad \left\{ \rho v_x v_z \right\} = 0. \quad (8.2.8)$$

Учитывая условие (8.2.5), перепишем полную систему граничных условий на поверхности разрыва в следующем виде:

$$\left\{ \rho v_x \right\} = 0, \quad (8.2.9)$$

$$\rho v_x \left\{ v_\tau^2 \right\} = 0, \quad (8.2.10)$$

$$\rho v_x \left\{ \frac{v^2}{2} + \psi \right\} = 0, \quad (8.2.11)$$

$$\left\{ p + \rho v_x^2 \right\} = 0. \quad (8.2.12)$$

Индексом τ здесь обозначены тангенциальные компоненты вектора скорости.

Очевидно, система уравнений (8.2.9) - (8.2.12) распадается на две взаимосоключаемые группы в зависимости от того, есть или нет поток вещества через поверхность разрыва.

Если

$$v_x = 0, \quad (8.2.13)$$

то на поверхности разрыва непрерывно давление газа

$$\left\{ p \right\} = 0, \quad (8.2.14)$$

а тангенциальные составляющие скорости v_τ и плотность могут испытывать произвольный скачок

$$\left\{ v_\tau \right\} = 0, \quad \left\{ \rho \right\} = 0, \quad \left\{ \frac{v^2}{2} + \psi \right\} = 0. \quad (8.2.15)$$

Такие разрывы называются *тангенциальными* (подробнее в [33]).

Если же

$$v_x = 0, \quad (8.2.16)$$

$$\left\{ v_\tau \right\} = 0, \quad \left\{ \rho v_x \right\} = 0, \quad \left\{ \frac{v^2}{2} + \psi \right\} = 0. \quad (8.2.17)$$

Разрывы этого типа называются *ударными волнами*. Их свойства тоже хорошо известны в обычной гидродинамике [33].

Таким образом, уравнения идеальной гидродинамики в форме законов сохранения на поверхности разрыва допускают лишь два взаимосоключаемых типа разрывов: либо ударная волна, либо тангенциальный разрыв.

§ 8.3. Классификация разрывов в магнитной гидродинамике

Как и в обычной гидродинамике, уравнения магнитной гидродинамики для идеальной среды (см. § 6.2) допускают разрывные решения. Ударные волны в магнитной гидродинамике впервые рассматривались Гофманом и Теллером в 1950 г. [86], исходя из релятивистского тензора энергии и импульса для среды и электромагнитного поля.

С.И. Сыроватский (1953) более широко поставил вопрос о возможных типах поверхности разрыва в проводящей среде с магнитным полем. Им была сформулирована замкнутая система уравнений идеальной магнитной гидродинамики в форме законов сохранения и на ее основе записаны граничные условия на поверхности разрыва. Воспроизведем кратко вывод граничных условий.

Возьмем в качестве исходных уравнений идеальной магнитной гидродинамики (6.2.20) - (6.2.25), переписанные в такой последовательности:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (8.3.1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \left[\vec{v}, \vec{B} \right], \quad (8.3.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div} \rho \vec{v}, \quad (8.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon + \frac{B^2}{8\pi} \right) = - \operatorname{div} G, \quad (8.3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho v_\alpha \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{\alpha\beta}^*. \quad (8.3.5)$$

В системе координат, связанной с поверхностью разрыва, все условия стационарны ($\partial/\partial t = 0$)

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (8.3.6)$$

$$\operatorname{rot} [\vec{v}, \vec{V}] = 0, \quad (8.3.7)$$

$$\operatorname{div} \rho v = 0, \quad (8.3.8)$$

$$\operatorname{div} G = 0, \quad (8.3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Pi_{\alpha\beta}^* = 0. \quad (8.3.10)$$

Четверо из этих условий имеют дивергентный вид и, следовательно, сводятся в интегральной форме к сохранению потоков векторов, стоящих под знаком дивергенции. Таким образом, должны сохраняться на поверхности разрыва следующие величины: перпендикулярная к поверхности разрыва компонента магнитного поля V_n , поток массы ρv_n , поток энергии G_n , поток импульса $\Pi_{\alpha n}^*$.

Исключением является условие (8.3.7). Оно записано в виде rot от вектора $[\vec{v}, \vec{V}]$ и после интегрирования по площади контура, показанного на рис. 8.3.1, дает согласно теореме Стокса

$$\iint_S \operatorname{rot} [\vec{v}, \vec{V}] \, dS = \oint_L [\vec{v}, \vec{V}] \, d\vec{l} = 0.$$

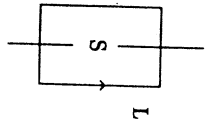


Рис. 8.3.1.
Контур L для вывода граничного условия на тангенциальную составляющую электрического поля

Таким образом, из условия (8.3.7) следует непрерывность тангенциальной составляющей вектора $[\vec{v}, \vec{V}]_{\tau}$, т.е. электрического поля в плоскости разрыва.

Как и в предыдущем параграфе, обозначая фигурными скобками разность заключенной в них величины с обеих сторон поверхности разрыва, запишем полную систему граничных условий на ней в следующем виде:

$$\{V_n\} = 0, \quad (8.3.11)$$

$$\{[\vec{v}, \vec{V}]_{\tau}\} = 0, \quad (8.3.12)$$

$$\{\rho v_n\} = 0, \quad (8.3.13)$$

$$\{G_n\} = 0, \quad (8.3.14)$$

$$\{\Pi_{\alpha n}^*\} = 0. \quad (8.3.15)$$

Физический смысл полученных граничных условий очевиден. Первые два из них представляют собой обычные электродинамические условия непрерывности нормальной составляющей магнитного поля и тангенциальной составляющей электрического поля. Последние три уравнения выражают непрерывность потоков массы, энергии и импульса соответственно.

Перепишем полученные граничные условия, используя выражения (6.2.26) и (6.2.27) для плотности потоков энергии и импульса, а также подставляя (8.3.11) в (8.3.12) и (8.3.13) в (8.3.15). Получим

$$\{V_n\} = 0, \quad (8.3.16)$$

$$\{v_n \vec{V}_{\tau}\} = V_n \{v_{\tau}\}, \quad (8.3.17)$$

$$\{\rho v_n\} = 0, \quad (8.3.18)$$

$$\left\{ \rho v_n \left(\frac{v^2}{2} + v \right) + \frac{1}{4\pi} \left(V^2 v_n - (v \vec{V}) V_n \right) \right\} = 0, \quad (8.3.19)$$

$$\left\{ p + \rho v_n^2 + \frac{B^2}{8\pi} \right\} = 0, \quad (8.3.20)$$

$$\rho v_n \left\{ \vec{v}_{\tau} \right\} = \frac{B_n}{4\pi} \left\{ \vec{V}_{\tau} \right\}. \quad (8.3.21)$$

Для дальнейшего полезна также покоординатная запись граничных условий в декартовой системе координат, ось x которой перпендикулярна к поверхности разрыва:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x \\ V_x \end{array} \right\} = 0, \quad (8.3.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x V_y - v_y V_x \\ v_x V_y - v_y V_x \end{array} \right\} = 0, \quad (8.3.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x V_z - v_z V_x \\ v_x V_z - v_z V_x \end{array} \right\} = 0, \quad (8.3.24)$$

$$\left\{ \rho v_x \right\} = 0, \quad (8.3.25)$$

$$\left\{ \rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + v \right) + \frac{1}{4\pi} \left(B^2 v_x - (\vec{v} \cdot \vec{B}) v_x \right) \right\} = 0, \quad (8.3.26)$$

$$\left\{ p + \rho v_x^2 + \frac{B^2}{8\pi} \right\} = 0, \quad (8.3.27)$$

$$\left\{ \rho v_x v_y - \frac{1}{4\pi} v_x v_y \right\} = 0, \quad (8.3.28)$$

$$\left\{ \rho v_x v_z - \frac{1}{4\pi} v_x v_z \right\} = 0. \quad (8.3.29)$$

Система состоит из восьми граничных условий. При $v = 0$ она переходит в систему из четырех уравнений (8.2.9) - (8.2.12).

Система граничных условий (8.3.16) - (8.3.21) в отличие от таковой в обычной электродинамике (см. (8.2.9) - (8.2.12)) не распадается на отдельные исключавшие друг друга группы уравнений. Это означает, что любой из допускаемых этими уравнениями разрывов может, вообще говоря, перейти в любой другой разрыв при непрерывном изменении условий движения [60]. Следовательно, классификация разрывов в магнитной гидродинамике имеет лишь условный характер. За ее основу принимаются *внешние признаки* течения вблизи поверхности: наличие или отсутствие нормальных составляющих скорости v_n и магнитного поля B_n , непрерывность или скачок плотности. Тем не менее, такая классификация совершенно необходима. Ниже мы рассмотрим классификацию разрывов, предельную С.И. Сыроватским. Она весьма удобна при исследовании МГД разрывов и широко используется в космической электродинамике.

Рассмотрим вытекающую из граничных условий (8.3.16) - (8.3.21) классификацию поверхностей разрыва в магнитной гидродинамике.

8.3.1. Поверхности разрыва без перетекания вещества

Предположим, что поток плазмы через поверхность разрыва отсутствует

$$v_n = 0. \quad (8.3.30)$$

Тогда тип разрыва зависит от того, проникает или нет магнитное поле через эту поверхность.

Если

$$B_n \neq 0, \quad (8.3.31)$$

то из граничных условий (8.3.16) - (8.3.21) получаем следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_n \\ B_n \end{array} \right\} = 0, \quad B_n \left\{ \begin{array}{l} v_\tau \\ v_\tau \end{array} \right\} = 0, \\ B_n \left\{ \begin{array}{l} v_\tau \\ v_\tau \end{array} \right\} = 0, \quad \left\{ p + \frac{B^2}{8\pi} \right\} = 0, \quad (8.3.32) \\ \left\{ \rho \right\} \neq 0.$$

На таком разрыве непрерывны скорость и напряженность магнитного поля, а, следовательно, в силу четвертого уравнения - и газовое давление. Не должен равняться нулю только скачок плотности. В противном случае все величины остаются непрерывными.

Рассмотренный тип разрыва, который называется *контактным* и представляет собой просто границу раздела двух сред, движущуюся вместе с этими средами. Схематически он показан на рис. 8.3.2, а.

Если же

$$B_n = 0, \quad (8.3.33)$$

то скорость и напряженность магнитного поля параллельны поверхности (плоскости $x = 0$) разрыва. При этом все граничные условия (8.3.16) - (8.3.21) выполняются тождественно, кроме одного:

$$\left\{ p + \frac{B^2}{8\pi} \right\} = 0. \quad (8.3.34)$$

Иными словами, параллельные поверхности разрыва скорость и напряженность магнитного поля могут претерпевать произвольные скачки по величине и направлению, лишь бы на поверхности разрыва оставалось непрерывным полное давление, складывающееся из обычного газового и магнитного

$$p = p + \frac{V^2}{8\pi} \quad (8.3.35)$$

Такой разрыв называется *магнетическим* (рис. 8.3.2, б).

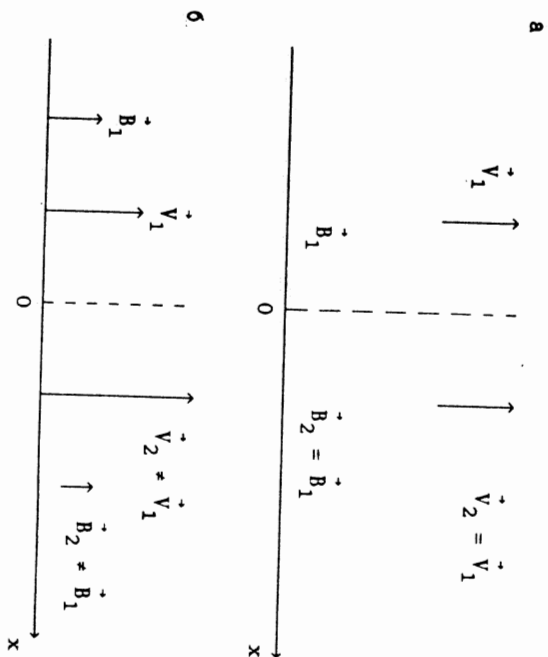


Рис. 8.3.2. Поверхности разрыва без перетекания вещества: а) контактный разрыв; б) тангенциальный разрыв

В магнитной гидродинамике тангенциальный разрыв обладает одним замечательным свойством. Известно, что в обычной гидродинамике тангенциальный разрыв неустойчив [59]. Скачок скорости порождает вихри, приводит к возникновению турбулентности в области разрыва.

С.И. Сыроватский (1953) показал, что магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на тангенциальный разрыв. В частности, если плотность среды ρ_0 и напряженность магнитного поля B_0 непрерывны, а разрыв претерпевает лишь тангенциальная составляющая скорости ($v_2 - v_1 = v_0$), то условие устойчивости тангенциального разрыва принимает особенно простой вид

$$\frac{v_0^2}{8\pi} \leq \frac{1}{4} \frac{\rho_0 v_0^2}{2} \quad (8.3.36)$$

Иными словами, такой разрыв (рис. 8.3.3, а) становится устойчивым по отношению к малым возмущениям (причем, разумеется, всем, а не только какого-либо определенного типа), если плотность магнитной энергии достигает $1/4$ от плотности энергии кинетической.

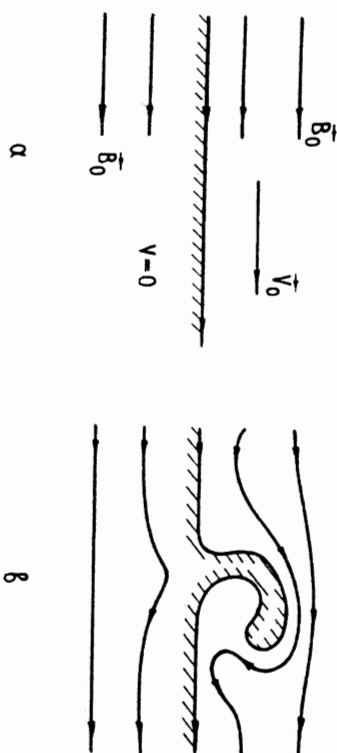


Рис. 8.3.3. Простейший тип тангенциальных разрывов (а); турбулентный вихрь приводит к росту магнитного поля (б)

Общий вывод о влиянии магнитного поля на устойчивость гидродинамических движений проводящей среды таков: магнитное поле может лишь увеличить устойчивость данного распределения скоростей по сравнению с устойчивостью того же распределения скоростей в отсутствие магнитного поля. Дело в том, что всякая неустойчивость потока и его турбулизация ведут, в силу "вымороженности" магнитного поля, к увеличению магнитной энергии (рис. 8.3.3б). Это не всегда выгодно с точки зрения энергетического принципа устойчивости.

8.3.2. Перпендикулярная ударная волна

Пусть теперь

$$v_n \neq 0, \quad B_n = 0, \quad (8.3.37)$$

т. е. есть перетекание плазмы через поверхности разрыва, но магнитное поле не проникает через нее. При этих условиях из системы уравнений (8.3.16) - (8.3.21) вытекают следующие условия.

