

Варианты домашних заданий
по методам математической физики
(метод функции Грина)

А.Ф. Горюнов

Москва 1987

Задание А

Вариант А1

А1.1. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения, описывающего потенциал бесконечной линии с параметрами $L, C, R = G = 0$.

Ответ: $G(x, t) = \frac{1}{2a} \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right); \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$

А1.2. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения, описывающего потенциал бесконечной линии без искажения ($RC = LG$).

Ответ: $G(x, t) = \frac{e^{-ht}}{2a} \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right); \quad h = \frac{R}{L}; \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$

А1.3. Бесконечно длинная трубка заполнена идеальным газом, давление и плотность которого p_0 и ρ_0 соответственно. В момент времени $t = 0$ в сечении $x = 0$ выделилось равномерно по сечению количество Q того же газа. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

Ответ: $\psi(x, t) = \frac{aQ}{2\rho_0} \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right); \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$

А1.4. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей идеального газа в результате действия мгновенных источников, расположенных на некоторой оси и излучивших в момент $t = 0$ количество Q_0 того же газа с каждой единицы длины оси; равновесные давление и плотность p_0 и ρ_0 соответственно.

Ответ: $\psi(\vec{r}, t) = \frac{aQ_0}{2\pi\rho_0} \frac{\eta \left(t - \frac{r}{a} \right)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}}; \quad r^2 = x^2 + y^2; \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$

А1.5. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей идеального газа в результате действия точечного источника, излучившего в момент $t = 0$ количество Q того же газа; равновесные давление и плотность p_0 и ρ_0 соответственно.

Ответ: $\psi(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\rho_0} \frac{\delta \left(t - \frac{r}{a} \right)}{r}; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$

А1.6. Построить фундаментальное решение уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta u - k^2 u$ в двумерном пространстве и дать физическую интерпретацию задачи.

Ответ: $G(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi a^2} \frac{\cos \left(k \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}}} \eta \left(t - \frac{r}{a} \right).$

А1.7. Построить фундаментальное решение уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta u + k^2 u$ в двумерном пространстве.

Ответ: $G(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi a^2} \frac{\text{ch} \left(k \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}}} \eta \left(t - \frac{r}{a} \right).$

A1.8. Построить фундаментальное решение уравнения малых поперечных колебаний бесконечного упругого стержня.

Ответ:
$$G(x, t) = \frac{\eta(t)}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(at\lambda^2) e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{\lambda^2}; \quad a^2 = \frac{JE}{\rho S}.$$

Вариант A2

A2.1. Построить фундаментальное решение уравнения продольных колебаний неоднородного стержня ($-\infty < x < \infty$) с характеристиками ρ_1, E_1, S_0 при $x < 0$, ρ_2, E_2, S_0 при $x > 0$.

Ответ:
$$G(x, \xi, t) = \begin{cases} \frac{a_1 E_2}{a_2(a_1 E_2 + a_2 E_1)} \eta\left(t + \frac{x}{a_1} - \frac{\xi}{a_2}\right), & x \leq 0, \xi \geq 0, \\ \frac{a_1 E_2 - a_2 E_1}{2a_2(a_1 E_2 + a_2 E_1)} \eta\left(t - \frac{x + \xi}{a_2}\right) + \frac{1}{2a_2} \eta\left(t - \frac{|x - \xi|}{a_2}\right), & x \geq 0, \xi \geq 0. \end{cases}$$

Функция $G(x, \xi, t)$ при $\xi \leq 0$ получается заменами $\xi \rightarrow -\xi$, $x \rightarrow -x$, $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$.

A2.2. Найти функцию Грина задачи Коши для уравнения колебаний струны ($-\infty < x < \infty$) с шариком массы m в точке $x = 0$.

Ответ:
$$G_m(x, \xi, t) = \begin{cases} \left[1 - e^{-h\left(t - \frac{|\xi - x|}{a}\right)}\right] G(x - \xi, t), & x\xi \leq 0, \\ G(x - \xi, t) - e^{-h\left(t - \frac{|\xi + x|}{a}\right)} G(x + \xi, t), & x\xi \geq 0, \end{cases}$$

$$G(x, t) = \frac{1}{2a} \eta\left(t - \frac{|x|}{a}\right), \quad h = \frac{2a\rho}{m}, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}.$$

A2.3. Найти функцию Грина задачи Коши для уравнения продольных колебаний стержня ($-\infty < x < \infty$) с тонкой прокладкой массы m в сечении $x = 0$.

Ответ:
$$G_m(x, \xi, t) = \begin{cases} \left[1 - e^{-h\left(t - \frac{|\xi - x|}{a}\right)}\right] G(x - \xi, t), & x\xi \leq 0, \\ G(x - \xi, t) - e^{-h\left(t - \frac{|\xi + x|}{a}\right)} G(x + \xi, t), & x\xi \geq 0, \end{cases}$$

$$G(x, t) = \frac{1}{2a} \eta\left(t - \frac{|x|}{a}\right), \quad h = \frac{2a\rho S}{m}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}.$$

A2.4. Неограниченная струна ($-\infty < x < \infty$) получает импульс I в результате поперечного удара в точке $x = 0$. Решить задачу о движении струны, если сопротивление внешней среды пропорционально скорости (коэффициент пропорциональности α задан).

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{I}{2\rho a} e^{-\beta t} I_0\left(\beta\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right) \eta\left(t - \frac{|x|}{a}\right), \quad \beta = \frac{\alpha}{2\rho}.$$

A2.5. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения, описывающего потенциал бесконечной линии с пренебрежимо малой утечкой на единицу длины.

Ответ:
$$G(x, t) = \frac{1}{2a} e^{-\beta t} I_0 \left(\beta \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right), \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad a^2 = \frac{1}{LC}.$$

A2.6. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения, описывающего потенциал бесконечной линии с параметрами R, C, L, G .

Ответ:
$$G(x, t) = \frac{1}{2a} e^{-\beta t} I_0 \left(\alpha \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right), \quad \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right),$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left| \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right|.$$

A2.7. Построить фундаментальное решение уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta u - k^2 u$ в трехмерном пространстве и дать физическую интерпретацию задачи.

Ответ:
$$G(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \left[\frac{1}{r} \delta \left(t - \frac{r}{a} \right) - \frac{k}{a} \frac{J_1 \left(k \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}}} \eta \left(t - \frac{r}{a} \right) \right].$$

A2.8. В трехмерном пространстве построить фундаментальное решение уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta u + k^2 u$

Ответ:
$$G(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \left[\frac{1}{r} \delta \left(t - \frac{r}{a} \right) - \frac{k}{a} \frac{I_1 \left(k \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}}} \eta \left(t - \frac{r}{a} \right) \right].$$

Вариант А3

A3.1. На струну ($-\infty < x < \infty$) с момента времени $t = 0$ до $t = t_0 > 0$ действует постоянная поперечная сила F_0 , приложенная в точке $x = 0$. Решить задачу о движении струны при нулевых начальных условиях. Начертить профиль струны в моменты времени $t_1 < t_0$, $t_2 > t_0$. Найти закон движения точки с координатой $x = x_0$ и построить соответствующий график.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{F_0}{2a\rho} \left[\left(t - \frac{|x|}{a} \right) \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right) - \left(t - t_0 - \frac{|x|}{a} \right) \eta \left(t - t_0 - \frac{|x|}{a} \right) \right].$$

A3.2. На струну ($-\infty < x < \infty$) с момента времени $t = 0$ действует постоянная поперечная сила $F_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, приложенная в точке $x = 0$. Решить задачу о движении струны при нулевых начальных условиях. Начертить профиль струны в момент времени $t_0 > 0$. Найти закон движения точки с координатой x_0 и построить соответствующий график.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{F_0}{2\alpha a \rho} \left[1 - e^{-\alpha \left(t - \frac{|x|}{a} \right)} \right] \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right).$$

A3.3. Решить задачу о движении струны ($-\infty < x < \infty$) под действием поперечной силы $F_0 \sin \omega t$, приложенной в точке $x = 0$ в течение времени от $t = 0$ до $t_0 = 2\pi/\omega$. Начальные условия нулевые. Начертить профиль струны в моменты времени $t_1 < t_0$ и $t_1 > t_0$. Найти закон движения точки с координатой $x = x_0$ и построить соответствующий график.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{F_0}{2a\omega\rho} \left[1 - \cos \omega \left(t - \frac{|x|}{a} \right) \right] \left[\eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right) - \eta \left(t_0 - t - \frac{|x|}{a} \right) \right].$$

A3.4. К струне ($-\infty < x < \infty$) с момента времени $t = 0$ приложена поперечная сила $F(t)$, движущаяся по закону $x = v_0 t$, $0 < v_0 < a$. Решить задачу о движении струны при нулевых начальных условиях.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{1}{2a\rho} \left[\int_{\frac{at-x}{a-v_0}}^{\frac{at+x}{a+v_0}} F(\tau) d\tau \eta(x - v_0 t) + \int_0^{\frac{at+x}{a+v_0}} F(\tau) d\tau \eta(x + at) - \int_0^{\frac{at-x}{a-v_0}} F(\tau) d\tau \eta(x - at) \right].$$

A3.5. К струне ($-\infty < x < \infty$) с момента времени $t = 0$ приложена сила $F_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, которая движется по закону $x = v_0 t$, $0 < v_0 < a$. Решить задачу о движении струны при нулевых начальных условиях. Начертить профиль струны в момент времени $t_0 > 0$. Найти закон движения точек струны с координатами $x_0 > 0$ и $x_0 \leq 0$ и построить соответствующие графики.

Ответ:
$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{F_0}{2a\alpha\rho} \left(1 - e^{-\alpha \frac{at-x}{a-v_0}} \right), & v_0 t \leq x \leq at, \\ \frac{F_0}{2a\alpha\rho} \left(1 - e^{-\alpha \frac{at+x}{a+v_0}} \right), & -at \leq x \leq v_0 t, \\ 0, & at \leq |x|. \end{cases}$$

A3.6. Решить задачу о движении струны ($-\infty < x < \infty$) при нулевых начальных условиях под действием поперечной силы $F_0 \sin \omega t \cdot \eta(t)$, точка приложения которой начинает двигаться с момента времени $t = 0$ по закону $x = v_0 t$, $0 < v_0 < a$.

Ответ:
$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{F_0}{2a\rho\omega} \left(1 - \cos \omega \frac{at-x}{a-v_0} \right), & v_0 t \leq x \leq at, \\ \frac{F_0}{2a\rho\omega} \left(1 - \cos \omega \frac{at+x}{a+v_0} \right), & -at \leq x \leq v_0 t, \\ 0, & at \leq |x|. \end{cases}$$

A3.7. В идеальном газе с момента времени $t = 0$ действуют источники того же газа, мощность в единице объема которых $q(x, y, t)$. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей газа, если равновесные давление и плотность равны соответственно p_0 и ρ_0 .

$$\text{Ответ: } \psi(\vec{r}, t) = \frac{a}{2\pi\rho_0} \int_0^t d\tau \int_{|\vec{r}-\vec{r}'| < a(t-\tau)} \frac{q(\vec{r}', \tau) d\vec{r}'}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\vec{r}-\vec{r}'|^2}}, \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

A3.8. В идеальном газе с момента времени $t = 0$ действуют источники того же газа, мощность в единице объема которых $q(x, y, z, t)$. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей газа, если равновесные плотность и давление ρ_0 и p_0 соответственно.

$$\text{Ответ: } \psi(\vec{r}, t) = \int_{|\vec{r}-\vec{r}'| < at} \frac{q\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{r}', \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

A3.9. В идеальном газе с момента времени $t = 0$ действуют источники того же газа, распределенные на некоторой оси. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей газа, если мощность источников на единицу длины оси равна $q(t)$, равновесные давление и плотность газа p_0 и ρ_0 соответственно.

$$\text{Ответ: } \psi(\vec{r}, t) = \frac{a}{2\pi\rho_0} \int_0^{t-\frac{r}{a}} \frac{q(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}}, \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

A3.10. В идеальном газе с момента времени $t = 0$ действуют источники того же газа, распределенные вдоль некоторой оси. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа, если мощность источников на единицу длины оси постоянна и равна q_0 , равновесные давление и плотность газа p_0 и ρ_0 соответственно.

$$\text{Ответ: } \psi(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{2\pi\rho_0} \ln \frac{at + \sqrt{a^2 t^2 - r^2}}{r} \eta\left(t - \frac{r}{a}\right), \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

A3.11. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей идеального газа, в котором с момента $t = 0$ действует точечный источник того же газа мощности $q(t)$.

$$\text{Ответ: } \psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\rho_0} \frac{q\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r}, \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

A3.12. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей идеального газа в результате действия равномерно распределенных на сфере радиуса r' мгновенных источников того же газа, излучивших количество q газа, если равновесные давление и плотность p_0 и ρ_0 соответственно.

$$\text{Ответ: } \psi(\vec{r}, t) = \frac{aq}{8\pi\rho_0 r r'} \left[\eta\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}\right) - \eta\left(t - \frac{r+r'}{a}\right) \right], \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

A3.13. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей идеального газа в результате действия равномерно распределенных на сфере радиуса r' источников того же газа, суммарная мощность которых $q_0\eta(t)$, если равновесные давление и плотность p_0 и ρ_0 соответственно.

$$\text{Ответ: } \psi(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{8\pi\rho_0 r r'} \left[\left(t - \frac{|r - r'|}{a} \right) \eta \left(t - \frac{|r - r'|}{a} \right) - \left(t - \frac{r + r'}{a} \right) \eta \left(t - \frac{r + r'}{a} \right) \right], \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

A3.14. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей идеального газа, равновесные давление и плотность которого p_0 и ρ_0 соответственно, в результате действия источников того же газа, мощность в единице объема которых $q_0 e^{-\alpha^2(x^2+y^2+z^2)}\eta(t)$.

$$\text{Ответ: } \psi(\vec{r}, t) = \frac{q_0 \sqrt{\pi}}{8\alpha^3 \rho_0 r} \{ 2 \operatorname{erf}(\alpha r) - \operatorname{erf}[\alpha(r + at)] - \operatorname{erf}[\alpha(r - at)] \}.$$

A3.15. В идеальном газе, давление и плотность которого p_0 и ρ_0 соответственно, с момента времени $t = 0$ начинают действовать источники того же газа, расположенные на некоторой оси, движущейся в направлении ей перпендикулярном по закону $\vec{r} = \vec{v}_0 t$, $0 < v_0 < a$. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей газа, если мощность источников на единицу длины оси $q(t)$.

$$\text{Ответ: } \psi(\vec{r}, t) = \frac{a}{2\pi\rho_0} \int_0^{t^*} \frac{q(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(t - \tau^2) - (\vec{r} - \vec{v}_0 \tau)^2}} \eta \left(t - \frac{r}{a} \right),$$

$$t^* = t - \frac{(z - v_0 t)\beta + \sqrt{(z - v_0 t)^2 + (1 + \beta^2)y^2}}{a(1 - \beta^2)}, \quad \beta = \frac{v_0}{a},$$

$$a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

A3.16. В идеальном газе, давление и плотность которого p_0 и ρ_0 соответственно, с момента времени $t = 0$ начинает действовать источник того же газа мощности $q(t)$, движущийся по закону $\vec{r} = \vec{v}_0 t$, $0 < v_0 < a$. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

$$\text{Ответ: } \psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\rho_0 R} q \left(t - \frac{v_0(z - v_0 t) + aR}{a^2 - v_0^2} \right), \quad \vec{r} = (x, y, z),$$

$$R = \sqrt{(z - v_0 t)^2 + \left(1 - \frac{v_0^2}{a^2}\right)(x^2 + y^2)}, \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

A3.17. Трубка $(-\infty < x < \infty)$ заполнена идеальным газом, давление и плотность которого p_0 и ρ_0 соответственно. С момента времени $t = 0$ в трубке начинает действовать плоский источник того же газа мощности $q(t)$ на единицу площади, движущийся по закону $x = v_0 t$, $0 < v_0 < a$. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

$$\text{Ответ: } \psi(x, t) = \begin{cases} \frac{a}{2\rho_0} \int_0^{\frac{at-x}{a-v_0}} q(\tau) d\tau, & v_0 t < x < at, \\ \frac{a}{2\rho_0} \int_0^{\frac{at+x}{a+v_0}} q(\tau) d\tau, & -at < x < v_0 t, \\ 0, & at < |x|, \end{cases} \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

Вариант А4

A4.1. Вдоль неоднородного стержня $(-\infty < x < \infty)$ с характеристиками ρ_1, E_1, S_0 при $x < 0$, ρ_2, E_2, S_0 при $x > 0$ распространяется волна $f(t + x/a_2)$, где $f(\xi) = 0$ при $\xi < 0$. Решить задачу о колебаниях стержня.

$$\text{Ответ: } u(x, t) = \begin{cases} f\left(t + \frac{x}{a_2}\right) + \frac{\sqrt{E_2 \rho_2} - \sqrt{E_1 \rho_1}}{\sqrt{E_2 \rho_2} + \sqrt{E_1 \rho_1}} f\left(t - \frac{x}{a_2}\right) \eta\left(t - \frac{x}{a_2}\right), & x \geq 0, \\ \frac{2\sqrt{E_2 \rho_2}}{\sqrt{E_2 \rho_2} + \sqrt{E_1 \rho_1}} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right) \eta\left(t - \frac{x}{a_1}\right), & x < 0. \end{cases}$$

A4.2. По струне $(-\infty < x < \infty)$ с шариком массы m в точке $x = 0$ распространяется волна $f(x + at)$, где $f(x) = 0$ при $x < 0$. Найти закон движения шарика.

$$\text{Ответ: } u(0, t) = h e^{-hat} \int_0^{at} f(\xi) e^{h\xi} d\xi, \quad h = \frac{2\rho}{m}.$$

A4.3. Решить задачу Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad 0 < t,$$

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y),$$

$$u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y).$$

$$\text{Ответ: } u(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\vec{r}-\vec{r}'|<at} \frac{\varphi(\vec{r}') d\vec{r}'}{\sqrt{a^2 t^2 - |\vec{r}-\vec{r}'|^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi a} \int_{|\vec{r}-\vec{r}'|<at} \frac{\psi(\vec{r}') d\vec{r}'}{\sqrt{a^2 t^2 - |\vec{r}-\vec{r}'|^2}}, \quad \vec{r} = xi + yj, \quad \vec{r}' = \xi i + \eta j.$$

A4.4. В момент времени $t = 0$ скорость газа равна нулю, а его плотность $\rho_0 \left(1 + \frac{S_0}{1 + x^2 + y^2}\right)$. Найти в акустическом приближении плотность газа на оси $x = y = 0$, если равновесные давление и плотность p_0 и ρ_0 соответственно.

Ответ:
$$\rho(0, t) = \rho_0 \left\{ 1 + \frac{S_0}{1 + a^2 t^2} \left[1 - \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2}} \ln \left(at + \sqrt{1 + a^2 t^2} \right) \right] \right\},$$

$$a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

A4.5. Решить задачу Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad 0 < t,$$

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z),$$

$$u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z).$$

Ответ:
$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\vec{r}-\vec{r}'|=at} \frac{\varphi(\vec{r}') ds}{t} + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\vec{r}-\vec{r}'|=at} \frac{\psi(\vec{r}') ds}{t}.$$

A4.6. В момент времени $t = 0$ скорости идеального газа равна нулю, а его плотность $\rho_0 [1 + S_0 \eta(r_0 - r)]$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Определить в акустическом приближении плотность газа $\rho(\vec{r}, t)$, если равновесные давление и плотность p_0 и ρ_0 соответственно.

Ответ:
$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 [1 + S(\vec{r}, t)], \quad S(\vec{r}, t) = S_0 \frac{r - at}{2r} \left[\eta \left(t - \frac{|r - r_0|}{a} \right) - \eta \left(t - \frac{r + r_0}{a} \right) \right], \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

A4.7. Решить задачу о поперечных колебаниях упругого стержня ($-\infty < x < \infty$), начальные отклонения которого $u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{kx^2}{4a}}$, $k > 0$, начальные скорости равны нулю.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + k^2 t^2}} e^{-\frac{kx^2}{4a(1 + k^2 t^2)}} \cos \left[\frac{k^2 x^2 t}{4a(1 + k^2 t^2)} - \delta \right],$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{kt}{1 + \sqrt{1 + k^2 t^2}}.$$

Вариант А5

A5.1. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения продольных колебаний полуограниченного стержня ($0 \leq x$), конец которого а) закреплен жестко; б) свободен.

Ответ:
$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a} \left[\eta \left(t - \frac{|\xi - x|}{a} \right) \mp \eta \left(t - \frac{\xi + x}{a} \right) \right].$$

A5.2. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения продольных колебаний полуограниченного стержня ($0 \leq x$), на конец которого действует сила сопротивления, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности k задан).

Ответ:
$$G(x, \xi, t) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{1}{2a} \eta\left(t - \frac{\xi+x}{a}\right) + \frac{1}{2a} \eta\left(t - \frac{|\xi-x|}{a}\right), \quad \alpha = \frac{ka}{ES}.$$

A5.3. Решить задачу о продольных колебаниях стержня ($0 \leq x$) с сосредоточенной массой на конце, вызванных продольным ударным импульсом I в торец стержня.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{I}{a\rho S} \left[1 - e^{-\frac{a\rho S}{m}(t-\frac{x}{a})}\right] \eta\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

A5.4. Конец линии ($0 \leq x$) с параметрами $L, C, R = G = 0$ заземлен через конденсатор C_0 . Построить функцию Грина соответствующей смешанной задачи для уравнения, описывающего потенциал.

Ответ:
$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a} \eta\left(t - \frac{|\xi-x|}{a}\right) + \frac{1}{a} \left[\frac{1}{2} - e^{-h\left(t-\frac{\xi+x}{a}\right)}\right] \eta\left(t - \frac{\xi+x}{a}\right),$$

$$h = \frac{1}{aLC_0}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

A5.5. По линии ($0 \leq x$) с параметрами $L, C, R = G = 0$, конец которой заземлен через конденсатор C_0 , распространяется волна $u(x, t) = f(x+at)$, $i(x, t) = -\sqrt{\frac{C}{L}} f(x+at)$. Определить зависимость заряда конденсатора от времени, если $f(x) = u_0 \sin \frac{\omega}{a} x \cdot \eta(x)$.

Ответ:
$$q(t) = \frac{2u_0 C_0 \beta}{1 + \beta^2} (\beta \sin \omega t - \cos \omega t + e^{-ht}), \quad h = \frac{1}{C_0} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \omega\beta = h.$$

A5.6. По полуограниченному стержню ($0 \leq x$) распространяется волна $f(x+at)$. Найти отраженную волну, если конец стержня: а) закреплен жестко; б) свободен.

Ответ:
$$u(x, t) = \mp f(at-x)\eta(at-x).$$

A5.7. По полуограниченному стержню ($0 \leq x$), конец которого испытывает сопротивление, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности k задан), распространяется волна $f(x+at)$. Найти отраженную волну.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} f(at-x)\eta(at-x), \quad \alpha = \frac{ka}{ES}.$$

A5.8. В точке $x = x_0 > 0$ полуограниченной струны ($0 \leq x$) с закрепленным концом действует с момента $t = 0$ поперечная сила $F_0 \sin \omega t$. Решить задачу о колебаниях струны.

$$\text{Ответ: } u(x, t) = \frac{F_0}{2\rho a \omega} \left\{ \left[1 - \cos \omega \left(t - \frac{|x - x_0|}{a} \right) \right] \eta \left(t - \frac{|x - x_0|}{a} \right) - \left[1 - \cos \omega \left(t - \frac{x + x_0}{a} \right) \right] \eta \left(t - \frac{x + x_0}{a} \right) \right\}.$$

A5.9. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения, описывающего потенциал полубесконечной линии ($0 \leq x$) без искажения ($RC = LG$) с заземленным концом.

$$\text{Ответ: } \bar{G}(x, \xi, t) = G(x - \xi, t) - G(x + \xi, t), \quad G(x, t) = \frac{1}{2a} e^{-kt} \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right), \\ k = \frac{R}{L}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

A5.10. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения, описывающего ток в полуограниченной линии ($0 \leq x$) без утечки с заземленным концом.

$$\text{Ответ: } \bar{G}(x, \xi, t) = G(x - \xi, t) + G(x + \xi, t), \\ G(x, t) = \frac{1}{2a} e^{-\beta t} I_0 \left(\beta \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right), \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad a^2 = \frac{1}{LC}.$$

Вариант А6

A6.1. Решить задачу о колебаниях полуограниченного стержня ($0 \leq x$), площадь поперечного сечения которого S_0 , под действием продольной силы $F(t)\eta(t)$, приложенной к его торцу. Начальные условия — нулевые.

$$\text{Ответ: } u(x, t) = \frac{1}{S_0 \sqrt{\rho T_0}} \int_0^{t - \frac{x}{a}} F(\tau) d\tau \eta \left(t - \frac{x}{a} \right).$$

A6.2. К концу полуограниченного стержня ($0 \leq x$), площадь поперечного сечения которого S_0 , прикреплен пружинка с коэффициентом жесткости k . С момента $t = 0$ свободный конец пружинки движется вдоль оси Ox по закону $\mu(t)$. Решить задачу о движении стержня.

$$\text{Ответ: } u(x, t) = \beta e^{-\beta(t - \frac{x}{a})} \int_0^{t - \frac{x}{a}} \mu(\tau) e^{\beta\tau} d\tau \eta \left(t - \frac{x}{a} \right), \quad \beta = \frac{k}{S_0 \sqrt{\rho E}}, \\ a^2 = \frac{E}{\rho}.$$

A6.3. Полуограниченная трубка ($0 \leq x$) заполнена идеальным газом, давление и плотность которого p_0 и ρ_0 соответственно. Конец трубки закрыт поршнем, который начинает двигаться по закону $u_0 \sin \omega t$. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

Ответ: $\psi(x, t) = u_0 a \sin \omega \left(t - \frac{x}{a} \right) \cdot \eta \left(t - \frac{x}{a} \right), \quad a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$

A6.4. Найти потенциал полубесконечной линии ($0 \leq x$) без искажения ($RC = LG$), к концу которой подключается батарея с эдс $E(t)\eta(t)$.

Ответ: $u(x, t) = e^{-\sqrt{\frac{C}{L}} Rx} E \left(t - x\sqrt{LC} \right) \eta \left(t - x\sqrt{LC} \right).$

A6.5. Конец полуограниченной линии ($0 \leq x$) без утечки подключен к батарее с эдс $E_0\eta(t)$. Найти ток в линии.

Ответ: $i(x, t) = E_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\beta t} I_0 \left(\beta \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \eta \left(t - \frac{x}{a} \right), \quad \beta = \frac{R}{2L},$
 $a^2 = \frac{1}{LC}.$

Задание В

Вариант В1

В1.1. Найти фундаментальное решение уравнения теплопроводности для тонкого неограниченного стержня, через поверхность которого происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона.

Ответ: $G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t} - ht}$.

В1.2. Найти потенциал бесконечной линии $(-\infty < x < \infty)$ с параметрами $R, C, L = G = 0$, в точку $x = \xi$ которой в момент времени $t = \tau$ помещен заряд q .

Ответ: $u(x, t) = \frac{q}{2} \sqrt{\frac{R}{\pi C(t - \tau)}} e^{-\frac{RC(x - \xi)^2}{4(t - \tau)}}$.

В1.3. Определить потенциал линии $(-\infty < x < \infty)$ с пренебрежимо малой индуктивностью на единицу длины, в точку $x = \xi$ которой в момент времени $t = \tau$ помещен заряд q .

Ответ: $u(x, t) = \frac{q}{2} \sqrt{\frac{R}{\pi C(t - \tau)}} e^{-\frac{RC(x - \xi)^2}{4(t - \tau)} - \frac{G}{C}(t - \tau)}$.

В1.4. В сечении $x = 0$ тонкой неограниченной трубки $(-\infty < x < \infty)$ в момент времени $t = 0$ выделилось количество q на единицу площади неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации). Определить концентрацию газа в процессе диффузии, если начальная концентрация равна нулю.

Ответ: $u(x, t) = \frac{q}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt} - ht}$.

В1.5. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения диффузии в среде, движущейся со скоростью v_0 в положительном направлении оси Ox , предполагая, что концентрация диффундирующего вещества зависит от x и t .

Ответ: $G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x - v_0 t)^2}{4Dt}}$.

В1.6. В сечении $x = \xi$ бесконечного стержня с характеристиками C_1, ρ_1, k_1, S_0 при $x < 0$, C_2, ρ_2, k_2, S_0 при $x > 0$ в момент времени $t = 0$ выделилось Q единиц тепла. Найти температуру стержня, если начальная температура равна нулю. Поверхность стержня теплоизолирована.

Ответ: $u(x, t) = \begin{cases} \frac{Qa_2^2}{k_2 S_0} \frac{2a_1 k_2}{a_1 k_2 + a_2 k_1} \frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{1}{4t} \left(\frac{x}{a_1} - \frac{\xi}{a_2} \right)^2}, & x < 0, \xi \geq 0, \\ \frac{Qa_2^2}{k_2 S_0} \frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} \left(\frac{a_1 k_2 - a_2 k_1}{a_1 k_2 + a_2 k_1} e^{-\frac{(x + \xi)^2}{4a_2^2 t}} + e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a_2^2 t}} \right), & x > 0, \xi \geq 0. \end{cases}$

При $\xi < 0$ решение получается заменой $\xi \rightarrow -\xi, x \rightarrow -x, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$.

В1.7. В сечении $x = 0$ неограниченного стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью имеется сосредоточенная теплоемкость C_0 . В момент $t = 0$ в сечении $x = \xi$ выделилось Q единиц тепла на единицу площади. Определить температуру $u(x, t)$ стержня, если $u(x, 0) = 0$.

$$\text{Ответ: } u(x, t) = \begin{cases} \frac{Q}{C\rho} \left[G(x, \xi, t) + \frac{C\rho S}{C_0} e^{\alpha^2 t + \frac{\alpha}{a}|x+\xi|} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x+\xi|}{2a\sqrt{t}} + \alpha\sqrt{t} \right) \right], & x\xi \geq 0, \\ \frac{QS}{C_0} e^{\frac{\alpha}{a}|\xi-x| + \alpha^2 t} \operatorname{Erf} \left(\frac{|\xi-x|}{2a\sqrt{t}} + \alpha\sqrt{t} \right), & x\xi \leq 0, \end{cases}$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right), \quad \alpha = \frac{2kS}{\alpha C_0}.$$

В1.8. В момент времени $t = 0$ на цилиндрической поверхности радиуса r' равномерно по поверхности выделилось Q единиц тепла на единицу длины вдоль оси. Найти температуру пространства, если начальная температура равна нулю.

$$\text{Ответ: } u(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi kt} I_0 \left(\frac{rr'}{2a^2 t} \right) e^{-\frac{r^2+r'^2}{4a^2 t}}.$$

Вариант В2

В2.1. В сечении $x = 0$ неограниченного стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью с момента времени $t = 0$ до $t = t_0 > 0$ действует источник тепла мощности Q_0 на единицу площади. Найти температуру стержня, если его начальная температура равна нулю.

$$\text{Ответ: } u(x, t) = \frac{Q_0|x|}{2k} \left[\psi \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) - \psi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t-t_0}} \right) \eta(t-t_0) \right],$$

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|\xi|} e^{-\xi^2} - \operatorname{Erf} |\xi|.$$

В2.2. Найти температуру прямой $(-\infty < x < \infty)$, на участке $] -l; l[$ которой в момент времени $t = 0$ выделилось Q равномерно распределенных единиц тепла. Начальная температура прямой равна нулю.

$$\text{Ответ: } u(x, t) = \frac{Qa^2}{4kl} \left(\operatorname{erf} \frac{l+x}{2a\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{l-x}{2a\sqrt{t}} \right).$$

В2.3. На участке $] -l; l[$ прямой $(-\infty < x < \infty)$ с момента времени $t = 0$ действуют источники, линейная плотность которых равна q_0 . Найти температуру прямой, если ее начальная температура равна нулю.

$$\text{Ответ: } u(x, t) = \frac{q_0 a^2 t}{2k} \left[\psi \left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}} \right) + \psi \left(\frac{l+x}{2a\sqrt{t}} \right) \right],$$

$$\psi(\xi) = \operatorname{erf} \xi + 2\xi \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} - |\xi| \operatorname{Erf} |\xi| \right).$$

B2.4. Определить температуру $u(x, t)$ прямой $(-\infty < x < \infty)$, на которой с момента времени $t = 0$ действуют источники тепла плотности $q_0 e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$, если $u(x, 0) = 0$.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{q_0 |x|}{2k} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left[\psi \left(\frac{\sqrt{\alpha} x}{\sqrt{1 + 4a^2 \alpha t}} \right) - \psi(\sqrt{\alpha} x) \right],$$

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi} |\xi|} e^{-\xi^2} - \operatorname{Erf} |\xi|.$$

B2.5. В пространстве с момента времени $t = 0$ действует точечный источник тепла постоянной мощности Q . Найти температуру $u(\vec{r}, t)$ пространства, если $u(\vec{r}, 0) = 0$.

Ответ:
$$u(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi k r} \operatorname{Erf} \left(\frac{r}{2a\sqrt{t}} \right).$$

B2.6. В пространстве с момента времени $t = 0$ до $t_0 > 0$ действует точечный источник тепла постоянной мощности Q . Определить температуру пространства $u(\vec{r}, t)$, если $u(\vec{r}, 0) = 0$.

Ответ:
$$u(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi k r} \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{r}{2a\sqrt{t}} \right) - \eta(t - t_0) \operatorname{Erf} \left(\frac{r}{2a\sqrt{t - t_0}} \right) \right].$$

B2.7. В сечении $x = 0$ бесконечной трубки $(-\infty < x < \infty)$ с момента $t = 0$ действует источник неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации) постоянной мощности Q на единицу площади. Найти концентрацию газа в процессе диффузии, если начальная концентрация равна нулю.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{Q}{4\sqrt{Dh}} \left[e^{-|x|\sqrt{\frac{h}{D}}} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x|}{2\sqrt{Dt}} - \sqrt{ht} \right) - e^{|x|\sqrt{\frac{h}{D}}} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x|}{2\sqrt{Dt}} + \sqrt{ht} \right) \right].$$

B2.8. Точечный источник тепла мощности Q_0 движется по прямой $(-\infty < x < \infty)$ по закону $x = v_0 t$. Найти температуру $u(x, t)$ прямой, если $u(x, 0) = 0$.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{Q_0}{2v_0 C \rho} e^{-\frac{v_0(x-v_0 t)}{2a^2}} \left[e^{-\frac{v_0|x-v_0 t|}{2a^2}} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x - v_0 t|}{2a\sqrt{t}} - \frac{v_0\sqrt{t}}{2a} \right) - e^{\frac{v_0|x-v_0 t|}{2a^2}} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x - v_0 t|}{2a\sqrt{t}} + \frac{v_0\sqrt{t}}{2a} \right) \right].$$

Вариант В3

B3.1. Найти температуру $u(x, t)$ прямой $(-\infty < x < \infty)$, если $u(x, 0) = T_0 \eta(l - |x|)$. Построить график зависимости температуры от времени в точках $x_1 \in]0, l[$, $x_2 > l$.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{T_0}{2} \left[\operatorname{erf} \frac{l+x}{2a\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{l-x}{2a\sqrt{t}} \right].$$

В3.2. Начальная температура прямой ($-\infty < x < \infty$) равна $T_0 e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$. Определить температуру прямой при $t > 0$. Получить асимптотическое представление зависимости температуры от времени в фиксированной точке при $t \rightarrow \infty$.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{T_0}{2} e^{a^2 \alpha^2 t} \left[e^{\alpha x} \operatorname{Erf} \left(a\alpha\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + e^{-\alpha x} \operatorname{Erf} \left(a\alpha\sqrt{t} - \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right],$$

$$u(x, t) = \frac{T_0}{a\alpha\sqrt{\pi t}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad (t \rightarrow \infty).$$

В3.3. Стержень с теплоизолированной поверхностью нагрет до температуры $T_0 e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$. Как будет меняться температура со временем?

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{1 + 4a^2 \alpha t}} e^{-\frac{\alpha x^2}{1 + 4a^2 \alpha t}}.$$

В3.4. Определить температуру неограниченного стержня ($-\infty < x < \infty$) с теплоизолированной поверхностью, если его начальная температура равна $Ax e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$. Найти асимптотическое представление зависимости температуры от времени при $t \rightarrow \infty$.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{Ax}{(1 + 4a^2 \alpha t)^{3/2}} e^{-\frac{\alpha x^2}{1 + 4a^2 \alpha t}},$$

$$u(x, t) = \frac{Ax}{(4a^2 \alpha t)^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad (t \rightarrow \infty).$$

В3.5. Определить температуру прямой ($-\infty < x < \infty$), начальная температура которой $T_0 \sin \beta x$.

Ответ:
$$u(x, t) = T_0 \sin \beta x e^{-a^2 \beta^2 t}.$$

В3.6. Как будет меняться температура $u(x, t)$ прямой ($-\infty < x < \infty$) со временем, если $u(x, 0) = T_0 \cos \beta x e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$?

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{T_0 e^{-\frac{\alpha x^2 + \beta^2 a^2 t}{1 + 4a^2 \alpha t}}}{\sqrt{1 + 4a^2 \alpha t}} \cos \frac{\beta x}{1 + 4a^2 \alpha t}.$$

В3.7. Найти температуру неограниченного стержня ($-\infty < x < \infty$), через поверхность которого происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры, если начальная температура равна T_1 при $x < 0$, T_2 при $x > 0$.

Ответ:
$$u(x, t) = \left[\frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_2 - T_1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right] e^{-ht}.$$

В3.8. Через поверхность неограниченного стержня ($-\infty < x < \infty$) происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой T_0 . Найти температуру $u(x, t)$ стержня, если $u(x, 0) = T_1 \operatorname{sign} x$.

Ответ:
$$u(x, t) = T_0 (1 - e^{-ht}) + T_1 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) e^{-ht}.$$

В3.9. Найти температуру неоднородного стержня, характеристики которого ρ_1, k_1, C_1, S_0 при $x < 0$, ρ_2, k_2, C_2, S_0 при $x > 0$, если начальная температура $T_0\eta(x)$. Поверхность стержня теплоизолирована.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{T_0}{1 + \alpha} \begin{cases} 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), & x \leq 0, \\ 1 + \alpha \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), & x \geq 0, \end{cases} \quad \alpha = \frac{k_1 a_2}{k_2 a_1}.$$

В3.10. Найти концентрацию вещества, диффундирующего в среде, движущейся со скоростью v_0 вдоль положительного направления оси Ox , если начальная концентрация $u_0(1 - \eta(x))$.

Ответ:
$$u(x, t) = u_0 \operatorname{Erf}\left(\frac{x - v_0 t}{2\sqrt{Dt}}\right).$$

В3.11. Трубка $(-\infty < x < \infty)$, в которой диффундирует газ, движется вдоль оси Ox со скоростью v_0 . Найти концентрацию газа, если начальная концентрация $u(x, 0) = u_0 e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{1 + 4D\alpha t}} e^{-\frac{\alpha(x - v_0 t)^2}{1 + 4D\alpha t}}.$$

В3.12. Начальная температура неоднородного стержня с характеристиками ρ_1, k_1, C_1, S_0 при $x < 0$, ρ_2, k_2, C_2, S_0 при $x > 0$, $T_0 e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$. Найти температуру в сечении $x = 0$. Найти асимптотическое представление зависимости температуры от времени при $t \rightarrow \infty$ в этом сечении.

Ответ:
$$u(0, t) = \frac{T_0}{k_1 a_2 + k_2 a_1} \left[k_1 a_2 e^{a_1^2 \alpha^2 t} \operatorname{Erf}(a_1 \alpha \sqrt{t}) + k_2 a_1 e^{a_2^2 \alpha^2 t} \operatorname{Erf}(a_2 \alpha \sqrt{t}) \right],$$

$$u(0, t) = T_0 \frac{k_1 a_2^2 + k_2 a_1^2}{k_1 a_2 + k_2 a_1} \frac{1}{a_1 a_2 \alpha \sqrt{\pi t}} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right), \quad (t \rightarrow \infty).$$

В3.13. В сечении $x = 0$ бесконечного стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью имеется тонкая прокладка с теплоемкостью C_0 . Найти температуру $u(0, t)$ прокладки, если при $t = 0$ ее температура равна 0° , а стержня — T_0 . Получить асимптотические представления функции $u(0, t)$ при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ и построить график этой функции.

Ответ:
$$u(0, t) = T_0 \left(1 - e^{\alpha^2 t} \operatorname{Erf}(\alpha \sqrt{t}) \right), \quad \alpha = \frac{2kS}{aC_0},$$

$$\frac{1}{T_0} u(0, t) = 2\alpha \sqrt{\frac{t}{\pi}} - \alpha^2 t + O\left(t^{3/2}\right), \quad (t \rightarrow 0),$$

$$\frac{1}{T_0} u(0, t) = 1 - \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi t}} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (t \rightarrow \infty).$$

В3.14. В сечении $x = 0$ неограниченного стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью находится тонкая прокладка с теплоемкостью C_0 . Найти температуру прокладки при $t > 0$, если при $t = 0$ ее температура равна T_0 , а стержня — 0° . Найти асимптотическое представление зависимости температуры прокладки от времени при $t \rightarrow \infty$ и построить график этой зависимости.

Ответ: $u(x, t) = T_0 e^{\alpha^2 t} \operatorname{Erf}(\alpha \sqrt{t}), \quad \alpha = \frac{2kS}{aC_0},$
 $u(0, t) = \frac{T_0}{\alpha \sqrt{\pi t}} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (t \rightarrow \infty).$

В3.15. В сечении $x = 0$ неограниченного стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью имеется тонкая прокладка с теплоемкостью C_0 . В момент времени $t = 0$ прокладка имела температуру T_0 , а стержень — $T_0 \eta(x)$. Определить температуру $u(0, t)$ прокладки. Получить асимптотическое представление функции $u(0, t)$ при $t \rightarrow \infty$ и построить ее график.

Ответ: $u(0, t) = \frac{T_0}{2} \left[1 + e^{\alpha^2 t} \operatorname{Erf}(\alpha \sqrt{t}) \right], \quad \alpha = \frac{2kS}{aC_0},$
 $u(0, t) = \frac{T_0}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi t}} + O\left(\frac{1}{t}\right) \right).$

В3.16. Решить задачу Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad 0 < t,$$

$$u(x, y, 0) = Axy e^{-\alpha(x^2+y^2)}, \quad \alpha > 0.$$

Ответ: $u(x, y, t) = \frac{Axy}{(1 + 4a^2 \alpha t)^3} e^{-\frac{\alpha(x^2+y^2)}{1+4a^2 \alpha t}}.$

В3.17. Найти температуру пространства, если начальная температура равна $T_0 e^{-\alpha(x^2+y^2)}$, $\alpha > 0$.

Ответ: $u(x, y, t) = \frac{T_0}{1 + 4a^2 \alpha t} e^{-\frac{\alpha(x^2+y^2)}{1+4a^2 \alpha t}}.$

В3.18. Начальная температура пространства $T_0 \sin \beta xy$. Найти температуру при $t > 0$.

Ответ: $u(x, y, t) = \frac{T_0}{\sqrt{1 + 4a^4 \beta^2 t^2}} \sin \frac{\beta xy}{1 + 4a^4 \beta^2 t^2} e^{-\frac{a^2 \beta^2 (x^2+y^2)t}{1+4a^4 \beta^2 t^2}}.$

В3.19. Начальная температура пространства $T_0 \eta(r_0 - r)$, где r — расстояние до некоторой оси. Определить температуру на оси в зависимости от времени.

Ответ: $u(0, t) = T_0 \left(1 - e^{-\frac{r_0^2}{4a^2 t}} \right).$

В3.20. Начальная температура пространства $T_0 e^{-\alpha r}$, $\alpha > 0$, где r — расстояние до некоторой оси. Найти температуру на оси $u(0, t)$ и получить асимптотическое представление функции $u(0, t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Ответ: $u(0, t) = T_0 \left[1 - \alpha a \sqrt{\pi t} e^{\alpha^2 a^2 t} \operatorname{Erf}(\alpha a \sqrt{t}) \right]$,
 $u(0, t) = \frac{T_0}{2\alpha a \sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (t \rightarrow \infty).$

В3.21. Решить задачу Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad 0 < t,$$

$$u(x, y, 0) = T_0 \cos \alpha(x^2 + y^2).$$

Ответ: $u(r, t) = \frac{T_0 e^{-\frac{4a^2 \alpha^2 r^2 t}{1+16a^4 \alpha^2 t^2}}}{\sqrt{1+16a^4 \alpha^2 t^2}} \cos\left(\frac{\alpha r^2}{1+16a^4 \alpha^2 t^2} + \delta\right), \quad \operatorname{tg} \delta = 4a^2 \alpha t,$
 $r^2 = x^2 + y^2.$

В3.22. Температура пространства при $t = 0$ $T_0 \frac{1 - e^{-\alpha r^2}}{r}$, $\alpha > 0$. Определить температуру при $t > 0$.

Ответ: $u(r, t) = T_0 \frac{e^{-\frac{\alpha r^2}{1+4a^2 \alpha t}}}{(1+4a^2 \alpha t)^3} [r^2 + 4a^2 t(1+4a^2 \alpha t)].$

В3.23. Начальная температура пространства $T_0 r^2 e^{-\alpha r^2}$, $\alpha > 0$, где r — расстояние до некоторой оси. Найти температуру при $t > 0$.

Ответ: $u(r, t) = \frac{T_0 \sqrt{\pi}}{2a} \frac{e^{-\frac{r^2}{8a^2 t}}}{t} \left[I_0\left(\frac{r^2}{8a^2 t}\right) - \frac{e^{-\frac{\alpha r^2}{2(1+4a^2 \alpha t)}}}{\sqrt{1+4a^2 \alpha t}} I_0\left(\frac{r^2}{8a^2 t(1+4a^2 \alpha t)}\right) \right].$

В3.24. Решить задачу Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad 0 < t,$$

$$u(x, y, z, 0) = T_0 e^{-\alpha r^2}, \quad \alpha > 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ответ: $u(r, t) = \frac{T_0}{(1+4a^2 \alpha t)^{3/2}} e^{-\frac{\alpha r^2}{1+4a^2 \alpha t}}.$

Вариант В4

В4.1. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой, конец которой имеет заданную температуру.

Ответ: $G_1(x, \xi, t) = G(x - \xi, t) - G(x + \xi, t), \quad G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$

В4.2. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой, конец которой облучается заданным потоком.

Ответ: $G_2(x, \xi, t) = G(x - \xi, t) + G(x + \xi, t), \quad G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$

В4.3. Конец линии ($0 \leq x$) с пренебрежимо малой индуктивностью на единицу длины заземлен. В точку $x = \xi > 0$ помещают заряд q . Найти потенциал линии.

Ответ: $u(x, t) = \frac{q}{C} e^{-ht} [G(x - \xi, t) - G(x + \xi, t)], \quad a^2 = \frac{1}{RC}, \quad h = \frac{G}{C},$
 $G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$

В4.4. В момент времени $t = 0$ на сфере радиуса r' выделилось $Q = C\rho$ единиц тепла, равномерно распределенных на сфере. Найти температуру пространства, если начальная температура равна нулю.

Ответ: $u(r, t) = \frac{1}{8\pi a r r' \sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(r-r')^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(r+r')^2}{4a^2t}} \right].$

В4.5. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности в двугранном угле ($0 \leq x, 0 \leq y, -\infty < z < \infty$), грани которого поддерживаются при заданной температуре, не зависящей от z .

Ответ: $\tilde{G}(x, y, \xi, \eta, t) = G_1(x, \xi, t) G_1(y, \eta, t),$
 $G_1(x, \xi, t) = G(x - \xi, t) - G(x + \xi, t), \quad G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$

В4.6. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности в октанте ($0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z$), грани которого имеют заданную температуру.

Ответ: $\tilde{G}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) = G_1(x, \xi, t) G_1(y, \eta, t) G_1(z, \zeta, t),$
 $G_1(x, \xi, t) = G(x - \xi, t) - G(x + \xi, t), \quad G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$

В4.7. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, l]$ с граничными условиями первого типа: а) методом Фурье; б) методом изображений.

Ответ: а) $G_1(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) X_n(x) e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x,$
 $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2,$
 б) $G_1(x, \xi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G(x - \xi + 2nl, t) - G(x + \xi + 2nl, t)],$
 $G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$

В4.8. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, l]$ с граничными условиями первого типа при $x = l$ и второго типа при $x = 0$: а) методом Фурье; б) методом изображений.

Ответ: а) $G_2(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\xi) X_n(x) e^{-a^2 \lambda_n t}$, $X_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_n} x$,
 $\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l} \right)^2$,
 б) $G_2(x, \xi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n [G(x - \xi + 2nl, t) + G(x + \xi + 2nl, t)]$,
 $G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$.

Вариант В5

В5.1. В сечении $x = \xi$ полуограниченной трубки ($0 \leq x$) в момент времени $t = 0$ выделилось Q частиц неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации). Определить концентрацию газа в процессе диффузии, если конец трубки закрыт полупроницаемой перегородкой, начальная концентрация равна нулю, концентрация газа вне трубки постоянна и равна нулю.

Ответ: $u(x, t) = \frac{Q}{S} e^{-ht} \left[\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi Dt}} - h e^{h(x+\xi)+h^2 Dt} \operatorname{Erf} \left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{Dt}} + h\sqrt{Dt} \right) \right]$.

В5.2. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности, описывающего распространение тепла в полуограниченном стержне с сосредоточенной теплоемкостью C_0 на конце при условии теплоизоляции этой системы.

Ответ: $G(x, \xi, t) = \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}} + \frac{k}{a^2 C_0} e^{\frac{k}{a^2 C_0}(\xi+x) + \frac{k^2 t}{a^2 C_0^2}} \operatorname{Erf} \left(\frac{\xi+x}{2a\sqrt{t}} + \frac{k\sqrt{t}}{aC_0} \right)$.

В5.3. Конец линии ($0 \leq x$) с параметрами $R, C, L = G = 0$ заземлен через конденсатор C_0 , начальный заряд которого q_0 . Определить зависимость заряда конденсатора от времени.

Ответ: $q(t) = q_0 e^{\frac{Ct}{C_0 R}} \operatorname{Erf} \left(\frac{1}{C_0} \sqrt{\frac{Ct}{R}} \right)$.

В5.4. Конец линии ($0 \leq x$) с параметрами $R, C, L = G = 0$ заземлен через конденсатор C_0 . В момент времени $t = 0$ в точку $x = x_0 > 0$ линии помещают заряд q_0 . Найти заряд конденсатора $q(t)$. Получить асимптотическое представление функции $q(t)$ при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ и построить ее график.

Ответ: $q(t) = q_0 e^{\frac{Cx_0}{C_0} + \frac{Ct}{C_0^2 R}} \operatorname{Erf} \left(\frac{x_0}{2} \sqrt{\frac{CR}{t}} + \frac{1}{C_0} \sqrt{\frac{Ct}{R}} \right),$

$$q(t) = \frac{2q_0}{x_0} \sqrt{\frac{t}{RC}} e^{-\frac{x_0^2 RC}{4t}} (1 + O(t)), \quad (t \rightarrow 0),$$

$$q(t) = C_0 \sqrt{\frac{R}{Ct}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad (t \rightarrow \infty).$$

В5.5. Конец линии ($0 \leq x$) с пренебрежимо малой индуктивностью на единицу длины заземлен через сосредоточенное сопротивление R_0 . В момент времени $t = 0$ в точку $x = x_0$ линии помещают заряд q_0 . Определить ток через сопротивление.

Ответ: $i(0, t) = \frac{q_0}{R_0} \sqrt{\frac{R}{C}} e^{-\frac{G}{C} t} \left[\frac{e^{-\frac{RCx_0^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} - \right.$
 $\left. - \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{R}{C}} e^{\frac{Rx_0}{R_0} + \frac{Rt}{CR_0^2}} \operatorname{Erf} \left(\frac{x_0}{2} \sqrt{\frac{Rt}{C}} + \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{Rt}{C}} \right) \right].$

Вариант В6

В6.1. Найти температуру полупрямой ($0 \leq x$), конец которой поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура $T_0 \eta(l - x)$.

Ответ: $u(x, t) = \frac{T_0}{2} \left[2 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$

В6.2. Начальная температура полуограниченного стержня ($0 \leq x$) с теплоизолированной боковой поверхностью $T_0 \eta(x-l)$. Найти температуру стержня при $t > 0$, если его торец поддерживается при нулевой температуре.

Ответ: $u(x, t) = \frac{T_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$

В6.3. Определить температуру полуограниченного стержня ($0 \leq x$), торец которого поддерживается при 0° , а начальная температура $T_0 \operatorname{sign}(l - x)$.

Ответ: $u(x, t) = T_0 \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$

В6.4. Начальная температура полупрямой ($0 \leq x$) $T_0 e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$. Определить температуру полупрямой, если ее конец поддерживается при 0° .

Ответ: $u(x, t) = \frac{T_0}{2} e^{a^2 \alpha^2 t} \left[e^{-\alpha x} \operatorname{Erf} \left(a\alpha\sqrt{t} - \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \right.$
 $\left. - e^{\alpha x} \operatorname{Erf} \left(a\alpha\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$

В6.5. Начальная температура полуограниченного стержня ($0 \leq x$) с теплоизолированной боковой поверхностью $T_0 e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$. Найти температуру стержня при $t > 0$, если торец поддерживается при 0° .

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{1 + 4a^2 \alpha t}} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t(1 + 4a^2 \alpha t)}} \right) e^{-\frac{\alpha x^2}{1 + 4a^2 \alpha t}}.$$

В6.6. Найти концентрацию частиц, диффундирующих в полубесконечной трубке ($0 \leq x$), конец которой закрыт, а начальная концентрация $u_0 \eta(l - x)$.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\operatorname{erf} \frac{l+x}{2a\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{l-x}{2a\sqrt{t}} \right], \quad a = \sqrt{D}.$$

В6.7. В полубесконечной трубке ($0 \leq x$) с закрытым концом диффундирует газ, начальная концентрация которого $u_0 \eta(x - l)$. Определить концентрацию газа при $t > 0$. Построить график зависимости концентрации от времени для $x_1 \in [0, l]$, $x_2 > l$.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{l-x}{2\sqrt{Dt}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{l+x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right].$$

В6.8. Найти концентрацию частиц, диффундирующих в полубесконечной трубке ($0 \leq x$), если конец ее закрыт, а начальная концентрация $T_0 e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} e^{D\alpha^2 x} \left[e^{-\alpha x} \operatorname{Erf} \left(\alpha\sqrt{Dt} - \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) + e^{\alpha x} \operatorname{Erf} \left(\alpha\sqrt{Dt} + \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right].$$

В6.9. Полубесконечный стержень ($0 \leq x$) с теплоизолированной поверхностью имеет в момент времени $t = 0$ температуру $T_0 \operatorname{sign}(x - l)$. Определить его температуру при $t > 0$. Построить графики зависимости температуры от времени в точках $x_1 < l$, $x_2 > l$.

Ответ:
$$u(x, t) = u_0 \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

В6.10. В среду, температура которой T_0 , помещают шар радиуса r_0 . Определить температуру вне шара, если шар поддерживается при 0° .

Ответ:
$$u(r, t) = T_0 \left[1 - \frac{r_0}{r} \operatorname{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

В6.11. Решить задачу Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad 0 < t,$$

$$u(x, y, z, 0) = u_0 \eta(r_0 - r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ответ:
$$u(r, t) = \frac{u_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{r+r_0}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) + \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2 t}} \right) \right].$$

В6.12. Начальная температура пространства $Ar e^{-\alpha r^2}$, $\alpha > 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Определить температуру при $t > 0$.

Ответ:
$$u(r, t) = \frac{Ae^{-\frac{\alpha r^2}{\beta^2}}}{\beta^3 r} \left[\left(\frac{r^2}{\beta^2} + 2a^2 t \right) \operatorname{erf} \frac{r}{2a\beta\sqrt{t}} + \frac{2a}{\beta} \sqrt{\frac{t}{\pi}} r e^{-\frac{r^2}{4a^2\beta^2 t}} \right],$$

$$\beta = \sqrt{1 + 4a^2 \alpha t}.$$

В6.13. Найти температуру пространства, обусловленную мгновенным выделением Q единиц тепла, равномерно распределенных по объему шара радиуса r_0 , если начальная температура равна нулю.

Ответ:
$$u(r, t) = \frac{3a^2 Q}{8\pi k r_0^3} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{r + r_0}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{r - r_0}{2a\sqrt{t}} \right) + \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2 t}} \right) \right].$$

В6.14. Через боковую поверхность полуограниченного стержня ($0 \leq x$) происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой T_1 . Найти температуру стержня, если его торец поддерживается при 0° , а начальная температура T_0 .

Ответ:
$$u(x, t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-ht} \operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} - \frac{T_1}{2} \left[e^{\frac{\sqrt{h}x}{a}} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + h\sqrt{t} \right) + e^{-\frac{\sqrt{h}x}{a}} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - h\sqrt{t} \right) \right].$$

В6.15. В сечении $x = x_0 > 0$ полуограниченного стержня ($0 \leq x$) с теплоизолированной боковой поверхностью действует источник тепла мощности Q_0 . Определить температуру стержня, если торец поддерживается при 0° , а начальная температура равна нулю.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{Q_0}{2kS} \left[|x - x_0| \psi \left(\frac{x - x_0}{2a\sqrt{t}} \right) - (x + x_0) \psi \left(\frac{x + x_0}{2a\sqrt{t}} \right) \right],$$

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi} |\xi|} e^{-\xi^2} - \operatorname{Erf} |\xi|.$$

В6.16. В сечении $x = x_0$ полуограниченного стержня действует источник постоянной мощности Q_0 . Определить температуру стержня, если его начальная температура равна нулю.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{Q_0}{2kS} \left[|x - x_0| \psi \left(\frac{x - x_0}{2a\sqrt{t}} \right) + (x + x_0) \psi \left(\frac{x + x_0}{2a\sqrt{t}} \right) \right],$$

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi} |\xi|} e^{-\xi^2} - \operatorname{Erf} |\xi|.$$

В6.17. Определить температуру полупрямой ($0 \leq x$), на которой находятся тепловые источники плотности $q_0 e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, если конец полупрямой поддерживается при 0° , начальная температура равна нулю.

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{q_0}{2\alpha^2 k} e^{\alpha^2 t} \left[e^{-\alpha x} \operatorname{Erf} \left(a\alpha\sqrt{t} - \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - e^{\alpha x} \operatorname{Erf} \left(a\alpha\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right] + \frac{q_0}{\alpha^2 k} \operatorname{Erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} - \frac{q_0}{\alpha^2 k} e^{-\alpha x}.$$

В6.18. Найти температуру двугранного угла ($0 \leq x, 0 \leq y, -\infty < x < \infty$), грани которого имеют нулевую температуру, а начальная температура T_0 .

Ответ:
$$u(x, y, t) = T_0 \operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} \operatorname{erf} \frac{y}{2a\sqrt{t}}.$$

В6.19. Найти температуру октанта ($0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z$), грань $z = 0$ которого теплоизолирована, остальные грани имеют нулевую температуру, а начальная температура T_0 .

Ответ:
$$u(x, y, z, t) = T_0 \operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} \operatorname{erf} \frac{y}{2a\sqrt{t}}.$$

В6.20. На конце полуограниченного стержня ($0 \leq x$) имеется тонкая пластинка, теплоемкость которой C_0 . При условии теплоизолированности этой системы найти температуру стержня, если его начальная температура T_0 , а пластинки — 0° .

Ответ:
$$u(x, t) = T_0 \left[1 - e^{hx+h^2 a^2 t} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ha\sqrt{t} \right) \right], \quad h = \frac{kS}{a^2 C_0}.$$

В6.21. На конце полуограниченного стержня ($0 \leq x$) имеется тонкая пластинка, теплоемкость которой C_0 . При условии теплоизолированности этой системы найти температуру $u(0, t)$ пластинки, если ее начальная температура равна нулю, а стержня $T_0 e^{-\frac{\alpha x}{a}}$, $\alpha = \frac{kS}{aC_0}$. Получить асимптотическое представление функции $u(0, t)$ при $t \rightarrow \infty$ и построить ее график.

Ответ:
$$u(0, t) = 2\alpha T_0 \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[1 - \alpha\sqrt{\pi t} e^{\alpha^2 t} \operatorname{Erf}(\alpha\sqrt{t}) \right],$$

$$u(0, t) = \frac{T_0}{\alpha\sqrt{\pi t}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad (t \rightarrow \infty).$$

Вариант В7

В7.1. Найти температуру полуограниченного стержня ($0 \leq x$), торец которого имеет температуру $\mu(t)$, а начальная температура равна 0° .

Ответ:
$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau) e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$$

В7.2. Найти температуру полупрямой, конец которой поддерживается при постоянной температуре T_0 , а начальная температура равна нулю.

Ответ: $u(x, t) = T_0 \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right)$.

В7.3. Конец полуограниченного стержня ($0 \leq x$) с теплоизолированной боковой поверхностью поддерживается с момента времени $t = 0$ до $t_0 > 0$ при температуре T_0 , а затем при нулевой температуре. Определить температуру стержня, если его начальная температура равна нулю.

Ответ: $u(x, t) = T_0 \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \eta(t - t_0) \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t - t_0}} \right) \right]$.

В7.4. Определить температуру полупрямой ($0 \leq x$), если ее конец имеет температуру At , а начальная температура равна нулю.

Ответ: $u(x, t) = A \left(t + \frac{x^2}{2a^2} \right) \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \frac{Ax}{a} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$.

В7.5. В тонкую трубку ($0 \leq x$) через ее конец поступает с момента времени $t = 0$ поток частиц постоянной плотности q_0 . Найти концентрацию частиц в трубке в процессе диффузии, если начальная концентрация равна нулю.

Ответ: $u(x, t) = \frac{q_0}{D} \left[2\sqrt{\frac{Dt}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} - x \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]$.

В7.6. В тонкую трубку ($0 \leq x$) через ее конец поступает с момента времени $t = 0$ до $t = t_0 > 0$ поток частиц плотности q_0 , а затем конец закрывают непроницаемой перегородкой. Найти концентрацию частиц в трубке, если начальная концентрация равна нулю.

Ответ: $u(x, t) = \frac{q_0 x}{D} \left[\psi \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) - \eta(t - t_0) \psi \left(\frac{x}{2\sqrt{D(t - t_0)}} \right) \right]$,
 $\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi} e^{-\xi^2} - \operatorname{Erf} \xi$.

В7.7. Найти потенциал линии ($0 \leq x$) с пренебрежимо малой индуктивностью на единицу длины, к концу которой в момент времени $t = 0$ подключается батарея с эдс E_0 .

Ответ: $u(x, t) = \frac{E_0}{2} \left[e^{\sqrt{RG}x} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} + \sqrt{\frac{Gt}{C}} \right) + e^{-\sqrt{RG}x} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} - \sqrt{\frac{Gt}{C}} \right) \right]$.

В7.8. К концу линии ($0 \leq x$) с параметрами $R, C, L = G = 0$ в момент времени $t = 0$ подключается через сосредоточенное сопротивление R_0 батарея с эдс E_0 . Определить потенциал линии.

Ответ: $u(x, t) = E_0 \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} \right) - e^{\frac{Rx}{R_0} + \frac{Rt}{R_0^2 C}} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} + \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{Rt}{C}} \right) \right]$.

В7.9. Шар радиуса r_0 помещают в среду, температура которой 0° . Найти температуру среды, если шар поддерживается при температуре T_0 .

Ответ: $u(r, t) = T_0 \frac{r_0}{r} \operatorname{Erf} \left(\frac{r - r_0}{2a\sqrt{t}} \right)$.

В7.10. Полуограниченный стержень ($0 \leq x$) с теплоизолированной боковой поверхностью изготовлен из горючего материала. В момент времени $t = 0$ торец стержня поджигают. Фронт горения имеет температуру T_0 и перемещается со скоростью v_0 . Найти температуру стержня, если его начальная температура равна нулю.

Ответ: $u(x, t) = \frac{T_0}{2} e^{-\frac{v_0(x-v_0t)}{2a^2}} \left[e^{\frac{v_0|x-v_0t|}{2a^2}} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x-v_0t|}{2a\sqrt{t}} + \frac{v_0\sqrt{t}}{2a} \right) + e^{-\frac{v_0|x-v_0t|}{2a^2}} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x-v_0t|}{2a\sqrt{t}} - \frac{v_0\sqrt{t}}{2a} \right) \right]$.

В7.11. Через конец тонкой полуограниченной трубки ($0 \leq x$) закрытый полупроницаемой перегородкой из внешней среды диффундирует газ. Найти концентрацию газа в трубке, если его начальная концентрация равна нулю, а концентрация во внешней среде u_0 .

Ответ: $u(x, t) = u_0 \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) - e^{hx+h^2Dt} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} + h\sqrt{Dt} \right) \right]$.

В7.12. Найти температуру октанта ($0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z$), начальная температура которого равна нулю, а грани поддерживаются при температуре T_0 .

Ответ: $u(x, y, z, t) = T_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2a\sqrt{t}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2a\sqrt{t}} \right) \right]$.

В7.13. Определить магнитное поле в полупространстве $z \geq 0$ с магнитной проницаемостью μ и большой проводимостью σ (токами смещения можно пренебречь), обусловленное возникновением в момент времени $t = 0$ поля H_0 в полупространстве $z \leq 0$, параллельного плоскости $z = 0$.

Ответ: $H(z, t) = H_0 \operatorname{Erf} \left(\frac{z}{c} \sqrt{\frac{\pi\mu\sigma}{t}} \right)$.

Вариант В8

В8.1. Какой плотности поток надо подавать на торец полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, чтобы температура торца менялась по закону $u(0, t) = At$? Начальная температура стержня равна нулю.

Ответ: Плотность потока $q(t) = \frac{2kA}{a} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$.

В8.2. Полуограниченный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью имеет нулевую температуру. Какой плотности поток надо подавать на торец стержня, чтобы температура торца менялась со временем по закону $u(0, t) = A\sqrt{t}$?

Ответ: Плотность потока $q(t) = \frac{kA\sqrt{\pi}}{2a}$.

В8.3. Через торец полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью происходит теплообмен со средой, температура которой $\theta(t)$. Какой должна быть $\theta(t)$, чтобы температура торца менялась со временем по закону At ? Начальная температура стержня равна нулю.

Ответ: $\theta(t) = A \left(t + \frac{2}{ah} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \right)$.

В8.4. Полуограниченный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью находится при нулевой температуре. С момента времени $t = 0$ через торец стержня происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой $\theta(t)$. При какой $\theta(t)$ температура торца будет меняться со временем по закону $A\sqrt{t}$?

Ответ: $\theta(t) = A \left(\sqrt{t} + \frac{\sqrt{\pi}}{2ah} \right)$.

В8.5. В пространстве, температура которого 0° , имеется сферическая полость радиуса r_0 . С момента $t = 0$ через сферическую поверхность во внешнее пространство подается поток плотности $q(t)$. При какой плотности потока температура сферической поверхности будет меняться со временем по закону At ?

Ответ: $q(t) = \frac{kA}{r_0} \left(t + \frac{2r_0}{a} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \right)$.

В8.6. В пространстве, температура которого 0° имеется сферическая полость радиуса r_0 . С момента времени $t = 0$ через сферическую поверхность во внешнее пространство подается тепловой поток плотности $q(t)$. Какой должна быть функция $q(t)$, чтобы температура сферической поверхности менялась со временем по закону $A\sqrt{t}$?

Ответ: $q(t) = \frac{kA}{r_0} \left(\sqrt{t} + \frac{r_0\sqrt{\pi}}{2a} \right)$.

В8.7. При каком начальном распределении температуры в полуограниченном стержне ($0 \leq x$) с теплоизолированной поверхностью (включая торец) температура торца будет меняться по закону $T_0 e^{-\alpha^2 t}$?

Ответ: $u(x, 0) = T_0 \cos \frac{\alpha}{a} x$.

В8.7. При каком начальном распределении температуры в полуограниченном стержне ($0 \leq x$) с теплоизолированной боковой поверхностью плотность потока через торец $q_0 e^{-\alpha^2 t}$?

Ответ: $u(x, 0) = \frac{qa}{\alpha k} \sin \frac{\alpha}{a} x$.

Задание С

Вариант С1

С1.1. Построить функцию Грина задачи Дирихле для полуплоскости.

$$\text{Ответ: } G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} - \ln \frac{1}{r_{MP_1}} \right), \quad M = (x, y), \\ P = (\xi, \eta), \quad P_1 = (\xi, -\eta), \quad y \geq 0, \quad \eta \geq 0.$$

С1.2. Построить функцию Грина задачи Дирихле для области $D = \{x, y : 0 < x, 0 < y\}$.

$$\text{Ответ: } G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} - \ln \frac{1}{r_{MP_1}} - \ln \frac{1}{r_{MP_2}} + \ln \frac{1}{r_{MP_3}} \right), \\ M = (x, y), \quad P = (\xi, \eta), \quad P_1 = (\xi, -\eta), \quad P_2 = (-\xi, \eta), \\ P_3 = (-\xi, -\eta), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0.$$

С1.3. Построить функцию Грина задачи Дирихле для плоского угла $D = \left\{ r, \varphi : 0 < r < \infty, 0 < \varphi < \frac{\pi}{n} \right\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Ответ: } G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^{2n} + \rho^{2n} - 2r^n \rho^n \cos n(\varphi + \psi)}{r^{2n} + \rho^{2n} - 2r^n \rho^n \cos n(\varphi - \psi)}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{n}.$$

С1.4. Построить функцию Грина задачи Дирихле для полукруга.

$$\text{Ответ: } G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} - \ln \frac{1}{r_{MP_1}} - \ln \frac{1}{r_{MP'}} + \ln \frac{1}{r_{MP'_1}} \right), \\ M = (r, \varphi), \quad P = (\rho, \psi), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \psi \right), \quad P' = (\rho, -\psi), \\ P'_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, -\psi \right), \quad r \leq r_0, \quad \rho \leq r_0, \quad 0 \leq \varphi, \psi \leq \pi.$$

С1.5. Построить функцию Грина задачи Дирихле для сектора $D = \left\{ r, \varphi : r < r_0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{n} \right\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Ответ: } G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \left(\ln \frac{r^{2n} + \rho^{2n} - 2r^n \rho^n \cos n(\varphi + \psi)}{r^{2n} + \rho^{2n} - 2r^n \rho^n \cos n(\varphi - \psi)} - \right. \\ \left. - \ln \frac{r^{2n} + \rho_1^{2n} - 2r^n \rho_1^n \cos n(\varphi + \psi)}{r^{2n} + \rho_1^{2n} - 2r^n \rho_1^n \cos n(\varphi - \psi)} \right), \\ r \leq r_0, \quad \rho \leq r_0, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{n}, \quad \rho_1 = \frac{r_0^2}{\rho}.$$

C1.6. Построить функцию Грина задачи Дирихле для полуплоскости $\{x, y : -\infty < x < \infty, 0 < y\}$, из которой удален полукруг $\{r, \varphi : 0 \leq r < r_0, 0 < \varphi < \pi\}$.

Ответ:
$$G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} - \ln \frac{1}{r_{MP_1}} - \ln \frac{1}{r_{MP'}} + \ln \frac{1}{r_{MP'_1}} \right),$$

$$M = (r, \varphi), \quad P = (\rho, \psi), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \psi \right), \quad P' = (\rho, -\psi),$$

$$P'_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, -\psi \right), \quad r \geq r_0, \quad \rho \geq r_0, \quad 0 \leq \psi \leq \pi.$$

C1.7. Построить функцию Грина задачи Дирихле для полупространства.

Ответ:
$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP'}} \right), \quad M = (x, y, z), \quad P = (\xi, \eta, \zeta),$$

$$P' = (\xi, \eta, -\zeta), \quad z \geq 0, \quad \zeta \geq 0.$$

C1.8. Построить функцию Грина задачи Дирихле для двугранного угла $D = \{x, y, z : 0 < x, 0 < y, -\infty < z < \infty\}$

Ответ:
$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP_1}} - \frac{1}{r_{MP_2}} + \frac{1}{r_{MP_3}} \right),$$

$$M = (x, y, z), \quad P = (\xi, \eta, \zeta), \quad P_1 = (\xi, -\eta, \zeta), \quad P_2 = (-\xi, \eta, \zeta),$$

$$P_3 = (-\xi, -\eta, \zeta), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0.$$

C1.9. Построить функцию Грина задачи Дирихле для двугранного угла $D = \left\{ r, \varphi, z : 0 < r < \infty, 0 < \varphi < \frac{\pi}{n}, -\infty < z < \infty \right\}, n = 1, 2, 3, \dots$

Ответ:
$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{r_{MP_k}} - \frac{1}{r_{MQ_k}} \right), \quad M = (r, \varphi, z),$$

$$P_k = \left(\rho, \frac{2k\pi}{n} + \psi, \zeta \right), \quad Q_k = \left(\rho, \frac{2k\pi}{n} - \psi, \zeta \right), \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{n}.$$

C1.10. Построить функцию Грина задачи Дирихле для октанта $D = \{x, y, z : 0 < x, 0 < y, 0 < z\}$.

Ответ:
$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{r_{MP_k}} - \frac{1}{r_{MP'_k}} \right), \quad M = (x, y, z), \quad P_1 = (\xi, \eta, \zeta),$$

$$P_2 = (-\xi, -\eta, \zeta), \quad P_3 = (-\xi, \eta, -\zeta), \quad P_4 = (\xi, -\eta, -\zeta), \quad P'_k = -P_k,$$

$$k = 1, 2, 3, 4.$$

C1.11. Построить функцию Грина задачи Дирихле для шара.

Ответ:
$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} \right), \quad M = (r, \theta, \varphi), \quad P = (\rho, \theta', \varphi'),$$

$$P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \theta', \varphi' \right), \quad r \leq r_0, \quad \rho \leq r_0.$$

С1.12. Построить функцию Грина внешней задачи Дирихле для шара.

Ответ:
$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} \right), \quad M = (r, \theta, \varphi), \quad P = (\rho, \theta', \varphi'),$$

$$P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \theta', \varphi' \right), \quad r \geq r_0, \quad \rho \geq r_0.$$

С1.13. Построить функцию Грина задачи Дирихле для полушара.

Ответ:
$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP'}} - \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} + \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP'_1}} \right),$$

$$M = (r, \theta, \varphi), \quad P = (\rho, \theta', \varphi'), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \theta', \varphi' \right),$$

$$P' = (\rho, \pi - \theta', \varphi'), \quad P'_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \pi - \theta', \varphi' \right),$$

$$r \leq r_0, \quad \rho \leq r_0, \quad \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \theta' \leq \frac{\pi}{2}.$$

С1.14. Построить функцию Грина задачи Дирихле для полупространства $\{x, y, z : -\infty < x, y < \infty, 0 < z\}$, из которого удален полушар: $\{r, \theta, \varphi : r < r_0, 0 \leq \varphi < 2\pi, \theta < \frac{\pi}{2}\}$.

Ответ:
$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP'}} - \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} + \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP'_1}} \right),$$

$$M = (r, \theta, \varphi), \quad P = (\rho, \theta', \varphi'), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \theta', \varphi' \right),$$

$$P' = (\rho, \pi - \theta', \varphi'), \quad P'_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \pi - \theta', \varphi' \right),$$

$$r \geq r_0, \quad \rho \geq r_0, \quad \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \theta' \leq \frac{\pi}{2}.$$

С1.15. Построить функцию Грина задачи Дирихле в слое, ограниченном плоскостями $z = 0, z = l$.

Ответ:
$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_{MP_k}} - \frac{1}{r_{MQ_k}} \right), \quad M = (x, y, z),$$

$$P_k = (\xi, \eta, \zeta + 2kl), \quad Q_k = (\xi, \eta, -\zeta + 2kl), \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq \zeta \leq l.$$

С1.16. На расстоянии ρ от оси бесконечного проводящего заземленного цилиндра радиуса $r_0 < \rho$ параллельно оси расположена неограниченная нить с линейной плотностью заряда e . Методом изображений найти потенциал электростатического поля вне цилиндра.

Ответ:
$$u(M, P) = 2e \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} - \ln \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} \right), \quad M = (r, \varphi), \quad P = (\rho, 0),$$

$$P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, 0 \right), \quad r_0 \leq r, \quad r_0 < \rho.$$

C1.17. На расстоянии h от заземленной проводящей плоскости расположена прямая, несущая двойной слой с постоянной плотностью момента \vec{p} . Методом изображений найти потенциал электростатического поля, если вектор \vec{p} перпендикулярен плоскости и направлен от нее.

$$\text{Ответ: } u(x, y) = p \frac{4y(x^2 + y^2 - h^2)}{(x^2 + y^2 + h^2)^2 - 4y^2 h^2}.$$

C1.18. Прямая, несущая двойной слой с плотностью момента \vec{p} , расположена параллельно проводящей заземленной плоскости на расстоянии h от нее. Методом изображений найти потенциал электростатического поля, если вектор \vec{p} параллелен плоскости.

$$\text{Ответ: } u(x, y) = p \frac{8xyh}{(x^2 + y^2 + h^2)^2 - 4y^2 h^2}.$$

C1.19. На расстоянии h от проводящей заземленной плоскости расположен точечный диполь, момент \vec{p} которого перпендикулярен плоскости и направлен от нее. Методом электростатических изображений найти потенциал этой системы.

$$\text{Ответ: } u(x, y, z) = \frac{p(z-h)}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}} + \frac{p(z+h)}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{3/2}}.$$

C1.20. Точечный диполь с моментом \vec{p} расположен на расстоянии h от заземленной проводящей плоскости. Найти методом изображений потенциал электростатического поля, если вектор \vec{p} параллелен плоскости.

$$\text{Ответ: } u(x, y, z) = px \left(\frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \right),$$

вектор \vec{p} в плоскости xOz .

C1.21. Внутри полого заземленного цилиндра радиуса r_0 расположена прямая $\{r, \varphi, z : r = \rho, \varphi = 0, -\infty < z < \infty\}$ с плотностью момента двойного слоя $\vec{p} = p \frac{\vec{\rho}}{\rho}$. Методом изображений найти электростатический потенциал.

$$\text{Ответ: } u(r, \varphi) = 2p \left(\frac{r \cos \varphi - \rho}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi} + \frac{r}{\rho} \frac{r - \rho_1 \cos \varphi}{r^2 + \rho_1^2 - 2r\rho_1 \cos \varphi} \right),$$

$$\rho_1 = \frac{r_0^2}{\rho}.$$

C1.22. Параллельно оси проводящего заземленного цилиндра радиуса r_0 расположена прямая $\{r, \varphi, z : r = \rho, \varphi = 0, -\infty < z < \infty\}$, несущая двойной слой с плотностью момента $\vec{p} = p \frac{\vec{\rho}}{\rho}$. Методом изображений определить потенциал электростатического поля вне цилиндра.

$$\text{Ответ: } u(r, \varphi) = 2p \left(\frac{r \cos \varphi - \rho}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi} + \frac{r}{\rho} \frac{r - \rho_1 \cos \varphi}{r^2 + \rho_1^2 - 2r\rho_1 \cos \varphi} \right),$$

$$\rho_1 = \frac{r_0^2}{\rho}.$$

C1.23. На расстоянии ρ от центра проводящей заземленной сферы радиуса $r_0 > \rho$ расположен точечный диполь $\vec{p} = p \frac{\vec{\rho}}{\rho}$. Методом изображений определить потенциал электростатического поля внутри сферы.

Ответ:
$$u(r, \theta) = p \left(\frac{r \cos \theta - \rho}{r_{MP}^3} + \frac{r_0 r}{\rho^2} \frac{r - \rho_1 \cos \theta}{r_{MP_1}^3} \right), \quad M = (r, \theta, \varphi),$$

$$P = (\rho, 0, 0), \quad P_1 = (\rho_1, 0, 0), \quad \rho_1 = \frac{r_0^2}{\rho}, \quad r \leq r_0.$$

C1.24. Вне заземленной проводящей сферы радиуса r_0 на расстоянии r_0 от центра расположен точечный диполь с моментом $\vec{p} = p \frac{\vec{\rho}}{\rho}$. Методом изображений определить потенциал электростатического поля вне сферы.

Ответ:
$$u(r, \theta) = p \left(\frac{r \cos \theta - \rho}{r_{MP}^3} + \frac{r_0 r}{\rho^2} \frac{r - \rho_1 \cos \theta}{r_{MP_1}^3} \right), \quad M = (r, \theta, \varphi),$$

$$P = (\rho, 0, 0), \quad P_1 = (\rho_1, 0, 0), \quad \rho_1 = \frac{r_0^2}{\rho}, \quad r \geq r_0.$$

C1.25. На круглую упругую пластинку толщины h радиуса r_0 , закрепленную по краю, действует постоянная поперечная сила F_0 , приложенная в центре. Найти статический прогиб пластинки.

Ответ:
$$u(r) = \frac{F_0}{16\pi D} \left(r_0^2 - r^2 + r^2 \ln \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)}.$$

Вариант C2

C2.1. На расстоянии h от проводящей заземленной плоскости расположен точечный заряд q . Определить плотность заряда и полный заряд q' плоскости.

Ответ:
$$\sigma(x, y) = -\frac{qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}, \quad q' = -q.$$

C2.2. На расстоянии h от заземленной проводящей плоскости расположена нить с зарядом e на единицу длины. Найти плотность заряда и полный заряд e' полосы единичной ширины, расположенной на плоскости перпендикулярно нити.

Ответ:
$$\sigma(x) = -\frac{eh}{\pi(x^2 + h^2)}, \quad e' = -e.$$

C2.3. Внутри двугранного угла ($0 \leq x, 0 \leq y, -\infty < z < \infty$), образованного заземленными металлическими полуплоскостями, в точке $(x_0, y_0, 0)$ находится заряд q . Найти плотность заряда и полный заряд каждой плоскости.

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } \sigma(x, z) &= -\frac{q_0 y_0}{2\pi} \left\{ [(x-x_0)^2 + y_0^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} - [(x+x_0)^2 + y_0^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} \right\}, \\ q_x &= -\frac{2q_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{y_0}, \\ \sigma(y, z) &= -\frac{q_0 x_0}{2\pi} \left\{ [x_0^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} - [x_0^2 + (y+y_0)^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} \right\}, \\ q_y &= -\frac{2q_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}. \end{aligned}$$

C2.4. Параллельно оси проводящего заземленного цилиндра радиуса r_0 на расстоянии $\rho > r_0$ от нее расположена бесконечная нить с зарядом e на единицу длины. Найти плотность заряда, заряд e' и дипольный момент \vec{p} единицы длины цилиндра.

$$\text{Ответ: } \sigma(\varphi) = -\frac{e}{2\pi r_0} \frac{\rho^2 - r_0^2}{r_0^2 + \rho^2 - 2r_0\rho \cos \varphi}, \quad e' = -e, \quad \vec{p} = -e\vec{\rho}.$$

C2.5. На расстоянии ρ от центра заземленной проводящей сферы радиуса $r_0 > \rho$ расположен точечный заряд q . Определить плотность заряда, заряд q' и дипольный момент сферы.

$$\text{Ответ: } \sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi r_0} \frac{r_0^2 - \rho^2}{(r_0^2 + \rho^2 - 2r_0\rho \cos \theta)^{3/2}}, \quad q' = -q, \quad \vec{p} = -q\vec{\rho}.$$

C2.6. На расстоянии ρ от центра проводящей заземленной сферы радиуса $r_0 < \rho$ расположен точечный заряд q . Определить плотность заряда, заряд q' и дипольный момент \vec{p} сферы.

$$\text{Ответ: } \sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi r_0} \frac{\rho^2 - r_0^2}{(r_0^2 + \rho^2 - 2r_0\rho \cos \theta)^{3/2}}, \quad q' = -\frac{r_0}{\rho} q, \quad \vec{p} = -q \frac{r_0^3}{\rho^3} \vec{\rho}.$$

C2.7. Внутри полого заземленного проводника, поперечным сечением которого является полукруг ($0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \varphi \leq \pi$), расположена нить с линейной плотностью заряда e . Найти плотность заряда на поверхности проводника, если координаты нити $r = h < r_0, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } \sigma(\varphi) &= -\frac{2eh}{\pi} \frac{(r_0^2 - h^2) \sin \varphi}{(r_0^2 + h^2) - 4r_0^2 h^2 \sin^2 \varphi}, \\ \sigma(r) &= -\frac{eh}{\pi} \frac{(r_0^2 - h^2)(r_0^2 - r^2)}{(r^2 + h^2)(r_0^4 + r^2 h^2)}. \end{aligned}$$

С2.8. Найти плотность заряда на проводящей заземленной плоскости с цилиндрическим выступом, поперечным сечением которого является полукруг $(0 \leq r \leq r_0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$, индуцированного бесконечной нитью $\{r, \varphi, z : r = h > r_0, \varphi = 0, -\infty < z < \infty\}$ с зарядом e на единицу длины.

Ответ:
$$\sigma(\varphi) = -\frac{2eh}{\pi} \frac{(h^2 - r_0^2) \cos \varphi}{(r_0^2 + h^2) - 4r_0^2 h^2 \cos^2 \varphi},$$

$$\sigma(r) = -\frac{eh}{\pi} \frac{(h^2 - r_0^2)(r^2 - r_0^2)}{(r_0^2 + h^2)(r^4 + h^2 r^2)}.$$

Вариант С3

С3.1. Над плоской границей диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε , заполняющего полупространство, на расстоянии h от границы расположен точечный заряд q . Найти силу, действующую на заряд.

Ответ:
$$\vec{F} = \frac{q^2}{4h^2} \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{\vec{h}}{h}.$$

С3.2. Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε заполняет полупространство. Параллельно границе диэлектрика на расстоянии h от нее расположена бесконечная заряженная нить с линейной плотностью заряда e . Определить силу, действующую на единицу длины нити.

Ответ:
$$\vec{F} = \frac{e^2}{h} \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{\vec{h}}{h}.$$

С3.3. В диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε , заполняющем все пространство, имеется цилиндрическая полость (радиус полости $r_0, \varepsilon = 1$). Внутри полости расположена нить ($r = \rho, \varphi = 0, -\infty < z < \infty$) с линейной плотностью заряда e . Определить силу, действующую на единицу длины нити.

Ответ:
$$\vec{F} = \frac{2e^2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 1} \frac{\vec{\rho}}{r_0^2 - \rho^2}.$$

С3.4. Параллельно оси диэлектрического цилиндра (радиус r_0 , диэлектрическая проницаемость ε) на расстоянии $\rho > r_0$ от нее расположена бесконечная нить с линейной плотностью заряда e . Найти силу, действующую на единицу длины нити.

Ответ:
$$\vec{F} = \frac{2e^2}{\rho^2} \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{r_0^2 \vec{\rho}}{\rho^2 - r_0^2}.$$

С3.5. В среде с магнитной проницаемостью μ имеется цилиндрическая полость (радиус полости $r_0, \mu = 1$), внутри которой параллельно оси на расстоянии ρ от нее расположен прямой ток I . Найти силу, действующую на единицу длины тока.

Ответ:
$$\vec{F} = \frac{2I^2}{c^2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{\vec{\rho}}{r_0^2 - \rho^2}.$$

С3.6. Определить силу, действующую на единицу длины прямого тока I , параллельному бесконечному цилиндру из магнетика с магнитной проницаемостью μ и расположенного на расстоянии ρ от оси цилиндра, радиус которого $r_0 < \rho$.

Ответ:
$$\vec{F} = \frac{2I^2}{c^2} \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \frac{r_0^2 \vec{\rho}}{\rho^2(\rho^2 - r_0^2)}.$$

Вариант С4

С4.1. Параллельно оси бесконечного проводящего заземленного цилиндра радиуса r_0 на расстоянии $\rho < r_0$ от оси расположена длинная заряженная нить с линейной плотностью заряда e . Найти электростатический потенциал внутри цилиндра, применяя метод Фурье.

Ответ:
$$u(r, \varphi) = 2e \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} - \ln \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} \right), \quad M = (r, \varphi), \quad P = (\rho_1, 0),$$

$$\rho_1 = \frac{r_0^2}{\rho}.$$

С4.2. Диэлектрическая проницаемость пространства

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq r < r_0, \\ \varepsilon_2, & r_0 < r, \end{cases}$$

где r — расстояние до оси Oz . Построить функцию Грина для уравнения, описывающего потенциал зарядов, плотность которых не зависит от z .

Ответ:
$$G(\vec{r}, \vec{\rho}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} \right), & r < r_0, \rho < r_0, \\ \frac{1}{2\pi\varepsilon_2} \left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{1}{r_{MP}} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{r_0}{r} \right), & r > r_0, \rho < r_0, \end{cases}$$

$$G(\vec{r}, \rho) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \ln \frac{1}{r_{MP}}, & r < r_0, \rho > r_0, \\ \frac{1}{2\pi\varepsilon_2} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \ln \frac{r}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} \right), & r > r_0, \rho > r_0, \end{cases}$$

$$M = (r, \varphi), \quad P = (\rho, \psi), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \psi \right).$$

С4.3. В среде с диэлектрической проницаемостью ε имеется цилиндрическая полость (радиус r_0 , $\varepsilon = 1$), внутри которой расположена бесконечная нить $\{r, \varphi, z : r = \rho, \varphi = 0, -\infty < z < \infty\}$, несущая двойной слой с плотностью момента $\vec{p} = p \frac{\vec{\rho}}{\rho}$. Найти силу, действующую на единицу длины нити.

Ответ:
$$\vec{F} = 4p^2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\rho r_0^2}{(r_0^2 - \rho^2)^3} \frac{\vec{\rho}}{\rho}.$$

С4.4. Параллельно оси бесконечного диэлектрического цилиндра (радиус r_0 , диэлектрическая проницаемость ε) на расстоянии $\rho > r_0$ от оси расположена нить $\{r, \varphi, z : r = \rho, \varphi = 0, -\infty < z < \infty\}$, несущая двойной слой с плотностью момента $\vec{p} = p \frac{\vec{\rho}}{\rho}$. Определить силу, действующую на единицу длины нити.

Ответ:
$$\vec{F} = 4p^2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\rho r_0^2}{(\rho^2 - r_0^2)^3} \frac{\vec{\rho}}{\rho}.$$

С4.5. Построить функцию Грина внешней задачи Дирихле для шара.

Ответ:
$$G(\vec{r}, \vec{\rho}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP_1}} \right), \quad M = (r, \theta, \varphi), \quad P = (\rho, \theta', \varphi'),$$

$$P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \theta', \varphi' \right).$$

С4.6. На расстоянии ρ от центра шара радиуса $r_0 < \rho$ находится точечный источник тепла постоянной мощности Q . Найти стационарную температуру вне шара, если шар поддерживается при нулевой температуре.

Ответ:
$$u(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi k} \left(\frac{1}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta)^{1/2}} - \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{(r^2 + \rho_1^2 - 2r\rho_1 \cos \theta)^{1/2}} \right), \quad \rho_1 = \frac{r_0^2}{\rho}.$$

С4.7. Шар радиуса r_0 , коэффициент теплопроводности которого k_1 , находится в среде с коэффициентом теплопроводности k_2 . Внутри шара на расстоянии ρ от его центра расположен точечный источник тепла постоянной мощности Q . Определить стационарную температуру вне шара.

Ответ:
$$u(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(k_1+k_2)n+k_2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta).$$

С4.8. В пространстве с проводимостью

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_1, & 0 \leq r < r_0, \\ \sigma_2, & r_0 < r, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, находится точечный источник тока I , расположенный на расстоянии $\rho < r_0$ от начала координат. Найти потенциал электростатического поля в пространстве.

Ответ:
$$u(r, \theta) = \begin{cases} \frac{I}{4\pi r_0} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_2} \left(\frac{r\rho}{r_0^2}\right)^n P_n(\cos \theta) + \frac{I}{4\pi\sigma_1 r_{MP}}, & r < r_0, \\ \frac{I}{4\pi\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_2} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta), & r > r_0, \end{cases}$$

$$M = (r, \theta, \varphi), \quad P = (\rho, 0, 0).$$

С4.9. Построить функцию Грина для уравнения, описывающего потенциал электростатического поля в среде с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq r < r_0, \\ \varepsilon_2, & r_0 < r, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\text{Ответ: } G(\vec{r}, \vec{\rho}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\alpha_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n P_n(\cos\gamma), & r < r_0, \quad \rho > r_0, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \left[\frac{1}{r_{MP}} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n \left(\frac{r_0^2}{\rho r}\right)^{n+1} P_n(\cos\gamma) \right], & r > r_0, \quad \rho > r_0, \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } G(\vec{r}, \vec{\rho}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left[\frac{1}{r_{MP}} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_n \left(\frac{\rho r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\gamma) \right], & r < r_0, \quad \rho < r_0, \\ \frac{1}{4\pi\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\alpha_n \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\gamma), & r > r_0, \quad \rho < r_0, \end{cases}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{n(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_2}, \quad M(\vec{r}) = (r, \theta, \varphi), \quad P(\vec{\rho}) = (\rho, \theta', \varphi'),$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{r\rho}.$$

С4.10. На расстоянии ρ от центра диэлектрического шара (диэлектрическая проницаемость ε , радиус $r_0 < \rho$) находится точечный заряд q . Определить силу, действующую на заряд.

$$\text{Ответ: } \vec{F} = \frac{q^2(1-\varepsilon)}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n(\varepsilon+1)+1} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{2n+1} \frac{\vec{\rho}}{\rho}.$$

С4.11. В диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε , заполняющем все пространство, имеется полость в форме сферы радиуса r_0 . Внутри полости на расстоянии ρ от центра находится точечный заряд q . Найти силу, действующую на заряд.

$$\text{Ответ: } \vec{F} = \frac{q^2(\varepsilon-1)}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n(\varepsilon+1)+\varepsilon} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{2n+1} \frac{\vec{\rho}}{\rho}.$$

С4.12. На расстоянии ρ от центра диэлектрического шара (диэлектрическая проницаемость ε , радиус $r_0 < \rho$), находится точечный диполь с моментом \vec{p} , направленным по радиусу. Определить силу, действующую на диполь.

$$\text{Ответ: } \vec{F} = \frac{p^2(\varepsilon-1)}{\rho^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)^2(n+2)}{n(\varepsilon+1)+1} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{2n+1} \frac{\vec{\rho}}{\rho}.$$

C4.13. В среде с магнитной проницаемостью μ имеется сферическая полость радиуса r_0 . Внутри полости на расстоянии ρ от центра находится точечный виток с током, магнитный момент которого равен \vec{p} и направлен по радиусу. Определить силу, действующую на виток.

Ответ:
$$\vec{F} = p^2 \frac{(1-\mu)}{\rho^4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2(n-1)^2}{n(\mu+1)+1} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{2n+1} \frac{\vec{p}}{\rho}.$$

C4.14. Однородная упругая пластинка радиуса r_0 толщины h , закрепленная по краю, получает импульс в результате поперечного удара в ее центр. Определить движение пластинки при нулевых начальных условиях.

Ответ:
$$u(r, t) = \frac{p_0^2 r_0^2}{a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(0) v_n(r)}{\|v_n\|^2} \frac{\sin \frac{a \mu_n^2 t}{r_0^2}}{\mu_n^2},$$

$$v_n(r) = I_0(\mu_n) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) - J_0(\mu_n) I_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right),$$

$$\|v_n\|^2 = r_0^2 J_0^2(\mu_n) I_0^2(\mu_n), \quad a^2 = \frac{D}{\rho h}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\sigma^2)},$$

μ_n — положительные корни уравнения

$$J_0(\mu) I_1(\mu) + J_1(\mu) I_0(\mu) = 0.$$

Вариант C5

C5.1. На расстоянии h от заземленной проводящей плоскости расположена бесконечная нить, несущая двойной слой с плотностью момента \vec{p} . Определить плотность заряда на плоскости, если вектор \vec{p} параллелен плоскости.

Ответ:
$$\sigma(x) = -\frac{2p}{\pi} \frac{xh}{(x^2 + h^2)^2}.$$

C5.2. Параллельно заземленной проводящей плоскости на расстоянии h от нее расположена бесконечная нить, несущая двойной слой с плотностью момента \vec{p} . Определить плотность заряда на плоскости, если вектор \vec{p} перпендикулярен плоскости и направлен к ней.

Ответ:
$$\sigma(x) = \frac{p}{\pi} \frac{x^2 - h^2}{(x^2 + h^2)^2}.$$

C5.3. На расстоянии h от проводящей заземленной плоскости расположен точечный диполь с моментом \vec{p} , параллельным плоскости. Определить плотность заряда на плоскости.

Ответ:
$$\sigma(x, y) = \frac{3phx}{2\pi (x^2 + y^2 + h^2)^{5/2}}.$$

C5.4. Точечный диполь с моментом \vec{p} расположен на расстоянии h от заземленной проводящей плоскости. Определить заряд на плоскости, если вектор \vec{p} перпендикулярен плоскости и направлен к ней.

Ответ:
$$\sigma(x, y) = \frac{p}{2\pi} \frac{x^2 + y^2 - 2h^2}{(x^2 + y^2 + h^2)^{5/2}}.$$

C5.5. Внутри полого проводящего заземленного цилиндра радиуса r_0 на расстоянии ρ от оси расположена нить $\{r, \varphi, z : r = \rho, \varphi = 0, -\infty < z < \infty\}$, несущая двойной слой с плотностью момента $\vec{p} = p \frac{\vec{\rho}}{\rho}$. Определить плотность заряда, заряд e' и дипольный момент \vec{p}' единицы длины цилиндра.

Ответ:
$$\sigma(\varphi) = -\frac{p}{\pi} \frac{(\rho^2 + r_0^2) \cos \varphi - 2\rho r_0}{(\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \varphi)^2}, \quad e' = 0, \quad \vec{p}' = -\vec{p}.$$

C5.6. На расстоянии ρ от центра проводящего заземленного шара радиуса $r_0 > \rho$ расположен точечный диполь с моментом p , направленным по радиусу. Определить плотность заряда на сфере, ее полный заряд и дипольный момент.

Ответ:
$$\sigma(\theta) = -\frac{p}{4\pi r_0} \frac{\rho^3 - 5\rho r_0^2 + r_0(3r_0^2 + \rho^2) \cos \theta}{(\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \theta)^{5/2}}, \quad q' = 0, \quad \vec{p}' = -\vec{p}.$$

C5.7. На расстоянии ρ от центра проводящей заземленной сферы радиуса $r_0 < \rho$ расположен точечный диполь с моментом p , направленным по радиусу. Определить плотность заряда на сфере, ее полный заряд и дипольный момент.

Ответ:
$$\sigma(\theta) = \frac{p}{4\pi r_0} \frac{\rho^3 - 5\rho r_0^2 + r_0(3r_0^2 + \rho^2) \cos \theta}{(\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \theta)^{5/2}}, \quad q' = p \frac{r_0}{\rho^2}, \quad \vec{p}' = \frac{2r_0^3}{\rho^3} \vec{p}.$$

C5.8. Найти потенциал равномерно заряженного тонкого кольца, радиус которого r_0 , полный заряд Q .

Ответ:
$$u(r, \theta) = \begin{cases} \frac{Q}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n} P_{2n}(0) P_{2n}(\cos \theta), & r < r_0, \\ \frac{Q}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(0) P_{2n}(\cos \theta), & r \geq r_0. \end{cases}$$

C5.9. Найти потенциал равномерно заряженного тонкого диска, радиус которого r_0 , полный заряд Q_0 .

Ответ:
$$u(r, \theta) = \begin{cases} \frac{Q_0}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2n+1} \frac{P_{2n}(0) P_{2n}(\cos \theta)}{n+1}, & r > r_0, \\ -\frac{2Q_0 r}{r_0^2} |\cos \theta| - \frac{2Q_0}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n} \frac{P_{2n}(0) P_{2n}(\cos \theta)}{2n-1}, & r < r_0. \end{cases}$$

C5.10. Решить задачу Дирихле

$$\Delta u = u_0 e^{-z} \cos x \sin y, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad 0 < z,$$

$$u(x, y, 0) = 0.$$

Ответ:
$$u(x, y, z) = u_0 \left(e^{-\sqrt{2}z} - e^{-z} \right) \cos x \sin y.$$

Вариант С6

С6.1. Найти решение $u(x, y)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, если на границе $u(x, 0) = u_0 \eta(l - |x|)$.

Ответ: $u(x, y) = \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{x^2 + y^2 - l^2}{2ly}$.

С6.2. Найти решение $u(x, y)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, если на границе $u(x, 0) = u_0 \cos x$.

Ответ: $u(x, y) = u_0 e^{-y} \cos x$.

С6.3. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в квадранте ($0 \leq x, 0 \leq y$), равное нулю при $y = 0$ и $u_0 \eta(y - l)$ при $x = 0$.

Ответ: $u(x, y) = \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{x^2 - y^2 + l^2}{2xy}$.

С6.4. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в квадранте ($0 \leq x, 0 \leq y$), равное нулю при $y = 0$ и $u_0 \sin y$ при $x = 0$.

Ответ: $u(x, y) = u_0 e^{-x} \sin y$.

С6.5. Найти стационарное распределение температуры внутри двугранного угла ($0 \leq x, 0 \leq y, -\infty < z < \infty$), с теплоизолированной гранью $y = 0$, если температура грани $x = 0$ равна $T_0 \eta(y - l)$.

Ответ: $u(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{l^2 + x^2 - y^2}{2lx}$.

С6.6. Найти потенциал внутри двугранного угла ($0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$), грань $\varphi = \frac{\pi}{n}$ которого имеет нулевой потенциал, а грань $\varphi = 0$ — потенциал $u_0 \eta(l - r)$.

Ответ: $u(r, \varphi) = \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{r^n - l^n \cos n\varphi}{l^n \sin n\varphi}$.

С6.7. Решить задачу Дирихле

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad 0 < y < x,$$
$$u(x, 0) = u_0 \sin x, \quad u(x, x) = 0.$$

Ответ: $u(x, y) = u_0 (e^{-y} \sin x - e^{-x} \sin y)$.

С6.8. Найти решение уравнения Лапласа, непрерывное в замкнутом круге радиуса r_0 и равное $f(\varphi)$ на границе. Рассмотреть частный случай $f(\varphi) = u_0 \cos 2\varphi$.

Ответ: $u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)f(\psi) d\psi}{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \psi)}, \quad u(r, \varphi) = u_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \cos 2\varphi.$

С6.9. Найти гармоническую в круге $K = \{r, \varphi : 0 \leq r < r_0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ и непрерывную в \bar{K} функцию, значения которой на границе круга равны $f(\varphi)$. Рассмотреть частный случай $f(\varphi) = u_0 \sin^3 \varphi$.

$$\text{Ответ: } u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)f(\psi) d\psi}{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \psi)},$$

$$u(r, \varphi) = \frac{u_0}{4} \left(3 \frac{r}{r_0} \sin \varphi - \frac{r^3}{r_0^3} \sin 3\varphi \right).$$

С6.10. Вне круга радиуса r_0 построить ограниченную гармоническую функцию, непрерывную при $r \geq r_0$, значения которой на границе круга равны $f(\varphi)$. Рассмотреть частный случай $f(\varphi) = u_0 \cos^2 \varphi$.

$$\text{Ответ: } u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - r_0^2)f(\psi) d\psi}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \psi)},$$

$$u(r, \varphi) = \frac{u_0}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \cos 2\varphi \right).$$

С6.11. Найти потенциал внутри полого цилиндра радиуса r_0 , если потенциал поверхности равен u_1 при $0 < \varphi < \pi$, u_2 при $\pi < \varphi < 2\pi$.

$$\text{Ответ: } u(r, \varphi) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2rr_0 \sin \varphi}{r_0^2 - r^2}.$$

С6.12. Найти стационарную температуру бруса, поперечным сечением которого является полукруг радиуса r_0 , диаметральной плоскостью которого поддерживается при температуре T_0 , а остальная поверхность — при температуре T_1 .

$$\text{Ответ: } u(r, \varphi) = T_0 + \frac{2(T_1 - T_0)}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2rr_0 \sin \varphi}{r_0^2 - r^2}.$$

С6.13. Найти стационарное распределение температуры в полупространстве ($z \geq 0$), граница которого имеет температуру $f(x, y)$. Рассмотреть частный случай $f(x, y) = T_0 \eta(x)\eta(y)$.

$$\text{Ответ: } u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}},$$

$$u(x, y, z) = \frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{z} + \operatorname{arctg} \frac{y}{z} + \operatorname{arctg} \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

С6.14. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве ($z \geq 0$), если на границе решение принимает заданные значения $f(x, y)$. Рассмотреть частный случай $f(x, y) = T_0 \eta(xy)$.

$$\text{Ответ: } u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}},$$

$$u(x, y, z) = \frac{T_0}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

С6.15. Найти решение уравнения Лапласа в полупространстве ($z > 0$), непрерывное при $z \geq 0$ и равное $f(x, y)$ на границе. Рассмотреть частный случай $f(x, y) = T_0 \operatorname{sign} xy$.

Ответ:
$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}},$$

$$u(x, y, z) = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

С6.16. Найти стационарное распределение температуры внутри двугранного угла ($0 \leq x, 0 \leq y, -\infty < z < \infty$), грань $x = 0$ которого имеет нулевую температуру, а грань $y = 0$ — температуру $T_0 \operatorname{sign} z$.

Ответ:
$$u(x, y, z) = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{xz}{y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

С6.17. Найти стационарную температуру октанта ($0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z$), грани $x = 0$ и $y = 0$ которого имеют температуру T_1 , а грань $z = 0$ — температуру T_2 .

Ответ:
$$u(x, y, z) = T_1 + \frac{2}{\pi}(T_2 - T_1) \operatorname{arctg} \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

С6.18. Найти потенциал внутри октанта ($0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z$), грани $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ которого имеют соответственно потенциал u_1 , u_2 , u_3 .

Ответ:
$$u(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \left(u_1 \operatorname{arctg} \frac{yz}{xr} + u_2 \operatorname{arctg} \frac{zx}{yr} + u_3 \operatorname{arctg} \frac{xy}{zr} \right),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

С6.19. Построить функцию $u(x, y, z)$, гармоническую при $z > 0$, непрерывную при $z \geq 0$ и принимающую при $z = 0$ заданные значения $f(x, y)$. Рассмотреть частный случай $f(x, y) = T_0 \sin x \cos y$.

Ответ:
$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}},$$

$$u(x, y, z) = T_0 e^{-\sqrt{2}z} \sin x \cos y.$$

С6.20. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в шаре радиуса r_0 при условии, что на поверхности шара решение равно $f(\theta, \varphi)$. Рассмотреть частный случай $f(\theta, \varphi) = u_0 \sin^3 \theta \cos 3\varphi$.

Ответ:
$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(r_0^2 - r^2) f(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \gamma)^{3/2}},$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

$$u(r, \theta, \varphi) = u_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^3 \sin^3 \theta \cos 3\varphi.$$

C6.21. Построить функцию $u(r, \theta, \varphi)$, гармоническую в шаре радиуса r_0 , непрерывную в замкнутом шаре и равную $f(\theta, \varphi)$ на поверхности шара. Рассмотреть частный случай $f(\theta, \varphi) = u_0 \sin 2\theta \sin \varphi$.

Ответ:
$$u(r, \varphi, \theta) = \frac{r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(r_0^2 - r^2) f(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \gamma)^{3/2}},$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

$$u(r, \theta, \varphi) = u_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \sin 2\theta \sin \varphi.$$

C6.22. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне шара радиуса r_0 при условии, что на границе шара решение равно $f(\theta, \varphi)$. Рассмотреть частный случай $f(\theta, \varphi) = u_0 \sin^2 \theta \cos 2\varphi$.

Ответ:
$$u(r, \varphi, \theta) = \frac{r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(r^2 - r_0^2) f(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma)^{3/2}},$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

$$u(r, \varphi, \theta) = u_0 \frac{r_0^3}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi.$$

C6.23. На расстоянии ρ от центра проводящего заряженного шара радиуса $r_0 < \rho$ находится точечный заряд q . Найти плотность заряда на поверхности шара, если он имеет заряд q_0 .

Ответ:
$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{q_0}{4\pi r_0^2} + \frac{q}{4\pi \rho r_0} \left[1 - \rho \frac{\rho^2 - r_0^2}{(r_0^2 + \rho^2 - 2r_0\rho \cos \theta)^{3/2}} \right].$$

C6.24. На расстоянии ρ от центра шара радиуса $r_0 < \rho$ находится точечный источник тепла постоянной мощности Q . Найти стационарное распределение температуры вне шара, если его поверхность поддерживается при температуре T_0 .

Ответ:
$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{T_0 r_0}{r} + \frac{Q}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} \right),$$

$$M = (r, \theta, \varphi), \quad P = (\rho, 0, 0), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, 0, 0 \right).$$

Вариант С7

C7.1. Построить функцию Грина уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве.

Ответ:
$$G(M, P) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr_{MP}), \quad \bar{G}(M, P) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr_{MP}).$$

C7.2. Построить функцию Грина уравнения Гельмгольца в полуплоскости $y > 0$, если на границе $y = 0$ задано условие 1-го типа.

Ответ: $G_1(M, P) = G(M, P) - G(M, P_1)$, $M = (x, y)$, $P = (\xi, \eta)$,
 $P_1 = (\xi, -\eta)$,
 $G(M, P) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr_{MP})$ или $G(M, P) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr_{MP})$.

C7.3. Построить функцию Грина 1-ой краевой задачи для уравнения Гельмгольца в полупространстве $z \geq 0$.

Ответ: $G_1(M, P) = G(M, P) - G(M, P_1)$, $M = (x, y, z)$, $P = (\xi, \eta, \zeta)$,
 $P_1 = (\xi, \eta, -\zeta)$,
 $G(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} e^{-ikr_{MP}}$ или $G(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} e^{ikr_{MP}}$.

C7.4. Построить функцию Грина уравнения Гельмгольца в полуплоскости $y > 0$, если на границе $y = 0$ задано условие 2-го типа.

Ответ: $G_1(M, P) = G(M, P) + G(M, P_1)$, $M = (x, y)$, $P = (\xi, \eta)$,
 $P_1 = (\xi, -\eta)$,
 $G(M, P) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr_{MP})$ или $G(M, P) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr_{MP})$.

C7.5. Построить функцию Грина уравнения Гельмгольца в полупространстве $z > 0$, если на границе $z = 0$ задано условие 2-го типа.

Ответ: $G_1(M, P) = G(M, P) + G(M, P_1)$, $M = (x, y, z)$, $P = (\xi, \eta, \zeta)$,
 $P_1 = (\xi, \eta, -\zeta)$,
 $G(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} e^{-ikr_{MP}}$ или $G(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} e^{ikr_{MP}}$.

C7.6. В среде с коэффициентом диффузии D действует точечный источник неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации) постоянной мощности Q . Найти стационарную концентрацию газа в процессе диффузии.

Ответ: $u(r) = \frac{Q}{4\pi Dr} e^{-kr}$.

C7.7. В среде с коэффициентом диффузии D действуют источники неустойчивого газа (распад газа пропорционален концентрации), расположенные на некоторой прямой. Найти стационарную концентрацию газа в процессе диффузии, если мощность источников на единицу длины прямой постоянна и равна Q .

Ответ: $u(r) = \frac{Q}{2\pi D} K_0(kr)$.

С7.8. На расстоянии h от непроницаемой плоскости расположен точечный источник неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации) постоянной мощности Q . Найти стационарную концентрацию газа в процессе диффузии.

Ответ:
$$u(\vec{r}) = \frac{Q_0}{4\pi D} \left(\frac{e^{-kr_{MP}}}{r_{MP}} + \frac{e^{-kr_{MP_1}}}{r_{MP_1}} \right),$$

$$M(\vec{r}) = (x, y, z), \quad P = (0, 0, h), \quad P_1 = (0, 0, -h).$$

С7.9. Параллельно непроницаемой плоскости на расстоянии h от нее расположена прямая с источниками неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации), мощность которых на единицу длины постоянна и равна Q . Определить стационарную концентрацию газа в процессе диффузии.

Ответ:
$$u(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi D} [K_0(kr_{MP}) + K_0(kr_{MP_1})],$$

$$M(\vec{r}) = (x, y), \quad P = (0, h), \quad P_1 = (0, -h).$$

Задание D

Вариант D1

D1.1. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} x^2 \frac{du}{dx}, \quad 1 < x < 2, \quad u(1) = u(2) = 0.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(\frac{2}{\xi} - 1\right), & 1 \leq x \leq \xi, \\ \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \left(\frac{2}{x} - 1\right), & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

D1.2. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{du}{dx}, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad |u(1)| < \infty.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

D1.3. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} (1 + \sin x) \frac{du}{dx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad u'(0) + u(0) = 0, \quad u'\left(\frac{\pi}{4}\right) - u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi}{2}\right) - 1\right], & 0 \leq x \leq \xi, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi}{2}\right) \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - 1\right], & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

D1.4. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} (\sin x + \cos x) \frac{du}{dx}, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \quad \left|u\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| < \infty, \\ u'\left(\frac{\pi}{4}\right) + u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\xi}{2}\right)\right], & -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right)\right], & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

D1.5. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} \sin^4 x \frac{du}{dx}, \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}, \quad u'\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad u\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{12} (3 \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^3 x) (3 \operatorname{ctg} \xi + \operatorname{ctg}^3 \xi + 4), & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \xi, \\ -\frac{1}{12} (3 \operatorname{ctg} \xi + \operatorname{ctg}^3 \xi) (3 \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^3 x + 4), & \xi \leq x \leq \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

D1.6. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} e^{x^2-2x} \frac{du}{dx}, \quad 1 < x < 2, \quad u'(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} u(1) = 0, \quad u(2) = 0.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{e\sqrt{\pi}}{2(1+\operatorname{erf} 1)} [1 + \operatorname{erf}(x-1)][\operatorname{erf} 1 - \operatorname{erf}(\xi-1)], & 1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{e\sqrt{\pi}}{2(1+\operatorname{erf} 1)} [1 + \operatorname{erf}(\xi-1)][\operatorname{erf} 1 - \operatorname{erf}(x-1)], & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

D1.7. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} (1+x) \frac{du}{dx} + \frac{u}{4(1+x)}, \quad -1 < x < 0, \quad |u(-1)| < \infty, \\ u'(0) + \frac{1}{2}u(0) = 0.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1+x}{1+\xi}}, & -1 \leq x \leq \xi, \\ \sqrt{\frac{1+\xi}{1+x}}, & \xi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

D1.8. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} (1-x) \frac{du}{dx} + \frac{u}{1-x}, \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) - u(0) = 0, \quad |u(1)| < \infty.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1-\xi}{1-x}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{2} \frac{1-x}{1-\xi}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

D1.9. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} (1+x)^{-3} \frac{du}{dx} - \frac{3u}{(1+x)^5}, \quad -1 < x < 0, \quad u'(-1) = 0, \\ u'(0) - u(0) = 0.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)^3(1+\xi), & -1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{2}(1+\xi)^3(1+x), & \xi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

D1.10. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} x^{-5} \frac{du}{dx} - \frac{9u}{x^7}, \quad 1 < x < 2, \quad u'(1) + u(1) = 0, \quad 2u'(2) - 3u(2) = 0.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{4} x^3 \xi^3 (4 \ln x - 1), & 1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{4} x^3 \xi^3 (4 \ln \xi - 1), & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

D1.11. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} x \frac{du}{dx} - \frac{u}{x}, \quad 1 < x < e, \quad u(1) = u'(e) = 0.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\cos 1} \sin(\ln x) \cos\left(\ln \frac{\xi}{e}\right), & 1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{\cos 1} \sin(\ln \xi) \cos\left(\ln \frac{x}{e}\right), & \xi \leq x \leq e. \end{cases}$$

D1.12. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} (1+x^2) \frac{du}{dx} + 2u, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} x \left(1 + \xi \operatorname{arctg} \xi - \frac{\pi + 3}{4} \xi\right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi \left(1 + x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi + 3}{4} x\right), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

D1.13. Найти функцию Грина оператора L :

$$Lu = -\frac{d}{dx} \frac{e^x}{x(2+x)} \frac{du}{dx} + \frac{2(1+x)}{x^2(2+x)^2} e^x, \quad 0 < x < 2, \quad u(0) = 0, \\ u'(2) + u(2) = 0.$$

$$\text{Ответ: } G(x, \xi) = \begin{cases} x^2 e^{-\xi}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi^2 e^{-x}, & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Вариант D2

D2.1. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения

$$x^2 u'' + 4xu' - 4u + \lambda u = 0, \quad 1 < x < 4, \\ u'(1) - u(1) = 0, \quad u'(4) + u(4) = 0.$$

$$\text{Ответ: } u(x) = \lambda \int_1^4 G(x, \xi) \xi^2 u(\xi) d\xi, \quad G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{x}{\xi^4}, & 1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{5} \frac{\xi}{x^4}, & \xi \leq x \leq 4. \end{cases}$$

D2.2. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения

$$u'' + u' + \lambda x^2 e^{-x} u = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0.$$

$$\text{Ответ: } u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \xi^2 u(\xi) d\xi, \quad G(x, \xi) = \begin{cases} e^{-\xi} (1 - e^{-x}), & 0 \leq x \leq \xi, \\ e^{-x} (1 - e^{-\xi}), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

D2.3. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения

$$(x^2 + 2)u'' + 2xu' + \lambda xu = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = u'(1) = 0.$$

$$\text{Ответ: } u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \xi u(\xi) d\xi, \quad G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\sqrt{2}}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

D2.4. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения

$$u'' + u + \lambda x^3 u = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$u'(0) - u(0) = 0, \quad u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$\text{Ответ: } u(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} G(x, \xi) \xi^3 u(\xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\sin \xi (\sin x + \cos x), & 0 \leq x \leq \xi, \\ -\sin x (\sin \xi + \cos \xi), & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

D2.5. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче Штурма — Лиувилля

$$u'' + 6u' + 25u + \lambda x e^{-x} u = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4},$$

$$u(0) = 0, \quad u'\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\text{Ответ: } u(x) = \lambda \int_0^{\pi/4} G(x, \xi) \xi e^{5\xi} u(\xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-3(x+\xi)} \sin 4x \cos 4\xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{4} e^{-3(x+\xi)} \sin 4\xi \cos 4x, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

D2.6. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения

$$u'' - 2u' + u + \lambda e^x u = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u'(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) e^{-\xi} u(\xi) d\xi,$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{x+\xi} x(\xi - 2), & 0 \leq x \leq \xi, \\ -\frac{1}{2} e^{x+\xi} \xi(x - 2), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

D2.7. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения

$$u'' + 2u' + u + \lambda x u = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \xi e^{2\xi} u(\xi) d\xi,$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} e^{-(x+\xi)} x(1 - \xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ e^{-(x+\xi)} \xi(1 - x), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

D2.8. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения

$$u'' - u + \lambda \sqrt{x} e^x u = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \sqrt{\xi} e^\xi u(\xi) d\xi,$ $G(x, \xi) = \begin{cases} e^{-\xi} \operatorname{sh} x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ e^{-x} \operatorname{sh} \xi, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$

D2.9. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче Штурма — Лиувилля

$$u'' + 4 \operatorname{ctg} x u' + \lambda x^3 u = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ |u(0)| < \infty, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} G(x, \xi) \xi^3 \sin^4 \xi u(\xi) d\xi,$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \operatorname{ctg} \xi + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 \xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \operatorname{ctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

D2.10. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения

$$x^2 u'' - xu' + 2u + \lambda x \sqrt[3]{x} u = 0, \quad 1 < x < e,$$

$$u(1) = u(e) = 0.$$

Ответ:
$$u(x) = \lambda \int_1^e G(x, \xi) \sqrt{\xi} u(\xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{x\xi}{\sin 1} \sin(\ln x) \sin\left(\ln \frac{\xi}{e}\right), & 1 \leq x \leq \xi, \\ -\frac{x\xi}{\sin 1} \sin(\ln \xi) \sin\left(\ln \frac{x}{e}\right), & \xi \leq x \leq e. \end{cases}$$

D2.11. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения

$$u'' + 2xu' + \lambda u = 0, \quad -1 < x < 1,$$

$$u(-1) = u(1) = 0.$$

Ответ:
$$u(x) = \lambda \int_{-1}^1 G(x, \xi) e^{\xi^2} u(\xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{4 \operatorname{erf} 1} (\operatorname{erf} 1 + \operatorname{erf} x)(\operatorname{erf} 1 - \operatorname{erf} \xi), & -1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{4 \operatorname{erf} 1} (\operatorname{erf} 1 + \operatorname{erf} \xi)(\operatorname{erf} 1 - \operatorname{erf} x), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

D2.12. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения

$$x^2(1 + \ln x)u'' - xu' + u + \lambda x^3(1 + \ln x)^2 u = 0, \quad 1 < x < 2,$$

$$u(1) = u'(2) = 0.$$

Ответ:
$$u(x) = \lambda \int_1^2 G(x, \xi) \xi u(\xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{3}(2x - 2 - \ln x)(\xi - 4 - 2 \ln \xi), & 1 \leq x \leq \xi, \\ -\frac{1}{3}(2\xi - 2 - \ln \xi)(x - 4 - 2 \ln x), & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

D2.13. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения

$$(x+1)u'' + xu' - u + \lambda(x+1)^2u = 0, \quad 0 < x < 4, \\ u(0) = 0, \quad u'(4) + u(4) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \lambda \int_0^4 G(x, \xi) e^\xi u(\xi) d\xi, \quad G(x, \xi) = \begin{cases} xe^{-\xi}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi e^{-x}, & \xi \leq x \leq 4. \end{cases}$

D2.14. Доказать, что наименьшее собственное значение λ_0 задачи

$$\frac{d}{dx} p(x) \frac{du}{dx} - q(x)u + \lambda \rho(x)u = 0, \quad a < x < b, \\ \alpha_1 u'(a) - \beta_1 u(a) = 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad \alpha_i + \beta_i > 0, \quad i = 1, 2, \\ \alpha_2 u'(b) + \beta_2 u(b) = 0, \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \rho(x) > 0,$$

где $\lambda_0 > 0$, удовлетворяет неравенству

$$\lambda_0 \geq \left[\int_a^b \int_a^b G^2(x, \xi) \rho(x) \rho(\xi) dx d\xi \right]^{-1/2},$$

$G(x, \xi)$ — соответствующая функция Грина.

Вариант D3

D3.1. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$2(x-1)^2 u'' + 3(x-1)u' - u = \sqrt{x-1}, \quad 1 < x < 2, \\ |u(1)| < \infty, \quad u'(2) + u(2) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x-1} \left(\ln(x-1) - \frac{2}{3} \right).$

D3.2. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$x^2 u'' - 2u = x^4, \quad 0 < x < 1, \\ |u(0)| < \infty, \quad u(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \frac{1}{10} x^2 (x^2 - 1).$

D3.3. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$3x^2 u'' - 2xu' + 2u = 7x^3 - 5x^2 \sqrt[3]{x^2}, \quad 0 < x < 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} u'(x) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \frac{1}{2} x^2 \left(x - \sqrt[3]{x^2} \right).$

D3.4. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$(\sin x + \cos x)u'' + (\sin x - \cos x)u' = (\sin x + \cos x)^3, \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2},$$
$$u\left(\frac{\pi}{4}\right) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)(1 + \cos x - \sin x).$

D3.5. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$x^2u'' + 2xu' - 6u = x(3 - 4 \ln x), \quad 0 < x < 1,$$
$$|u(0)| < \infty, \quad u(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = x \ln x.$

D3.6. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$u'' + 2 \operatorname{tg} x u' = \operatorname{tg} x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4},$$
$$u(0) = u'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Ответ: $u(x) = -\frac{1}{4} \sin 2x.$

D3.7. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$u'' + 2 \operatorname{ctg} x u' = 2 \operatorname{ctg} x, \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2},$$
$$u\left(\frac{\pi}{4}\right) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ответ: $u(x) = x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} x.$

D3.8. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$\operatorname{ch} x u'' + e^x u' = 1, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = u'(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = 2 \operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{2} - e(x - \ln \operatorname{ch} x).$

D3.9. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$xu'' + 2u' = e^{-x^2}, \quad 0 < x < 1,$$
$$|u(0)| < \infty, \quad u'(1) + u(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \frac{1}{2x} (e^{-x^2} - 1) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf} x - \operatorname{erf} 1).$

D3.10. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$(2-x)^2 u'' + (2-x)u' + u = 2-x, \quad 0 < x < 1,$$

$$u'(0) + \frac{1}{2}u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

$$\text{Ответ: } u(x) = \frac{2-x}{2} \ln(2-x) \ln \frac{2-x}{4}.$$

D3.11. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$u'' + 2(x+1)u' = e^{-x^2}, \quad -1 < x < 1,$$

$$u(-1) = u'(1) = 0.$$

$$\text{Ответ: } u(x) = \frac{\pi}{4} (\operatorname{erf} x + \operatorname{erf} 1 - e^3 \operatorname{erf}(x+1)).$$

D3.12. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$(\sin x - \cos x)u'' - x \sin x u' + \sin x u = \sin x - x, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u'(0) = u(\pi) = 0.$$

$$\text{Ответ: } u(x) = 1 - \cos x - \frac{2}{\pi}(x - \sin x).$$

D3.12. Методом функции Грина решить краевую задачу

$$u'' - 2xu' - 2u = -1, \quad -1 < x < 0,$$

$$u'(-1) + 2u(-1) = 0, \quad u(0) = 0.$$

$$\text{Ответ: } u(x) = \frac{1}{2} (1 - e^{x^2}) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} \operatorname{erf} x.$$