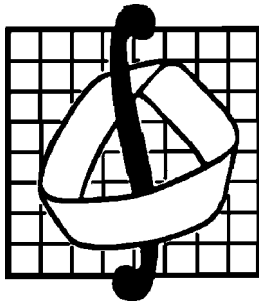


**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет**



**Математическое моделирование движений
человека в норме и при некоторых видах
патологии.**

под редакцией профессора И.В.Новожилова и
доцента П.А.Кручинина

Москва 2005 год

Математическое моделирование движений человека в норме и при некоторых видах патологии. под ред. И.В.Новожилова и П.А.Кручинина– М.: Изд. МГУ, 2005 – 64 с.

В сборник включены работы по физиологии движения человека, выполненные на кафедре прикладной механики и управления МГУ в 2002-2004 годах. Исследования проводились в следующих направлениях:

- Уточнение динамических моделей для сгибательно-разгибательных движений нижних конечностей человека в сагиттальной плоскости.
- Уточнение моделей поддержания позы с помощью обратных связей от известных из литературы афферентных датчиков.
- Использование математических моделей движения в алгоритмах обработки информации при биомеханических исследованиях.
- Использование построенных моделей при анализе позы больного с некоторыми типами нарушений, наблюдаемыми при детском церебральном параличе.

© Механико-математический факультет
МГУ, 2005 г.

Содержание

Предисловие.....	4
Трехзвенная математическая модель для задачи стабилизации вертикальной позы человека. <i>Новожилов И. В., Терехов А. В., Забелин А. В., Левик Ю. С., Шлыков В. Ю., Казенников О. В.</i>	7
Математическая модель процесса стабилизации вертикальной позы человека при медленных возмущениях основания <i>Терехов А. В.</i>	21
О возможности совместной обработки показаний системы видеоанализа движений и стабилграфической платформы... <i>Кручинин П.А., Мишанов А.Ю., Саенко Д.Г.</i>	28
Математическое моделирование нарушений позы больных при rectus-синдроме и hamstring-синдроме <i>Кручинин П.А., Журавлев А.М., Хакимов А.И.</i>	54

Предисловие

Настоящий сборник подводит итог исследований по физиологии движения человека, проводимых на кафедре прикладной механики и управления МГУ за последние три года. Исследования проводились в следующих направлениях:

- Уточнение динамических моделей для сгибательно-разгибательных движений нижних конечностей человека в саггитальной плоскости.
- Уточнение моделей поддержания позы с помощью обратных связей от известных из литературы афферентных датчиков.
- Использование построенных моделей при анализе позы больного с некоторыми типами нарушений, наблюдаемыми при детском церебральном параличе.

В сборник включены четыре работы, отражающие основные достижения в указанных направлениях.

В первой работе предпринята попытка построить математическую модель, которая описывала бы движения человека вблизи вертикали на основе трехзвенной модели человека. Предполагается, что поддержание позы осуществляется за счет двусуставных мышц нижних конечностей. Исследование собственных частот построенной модели показало, что они согласуются с экспериментально наблюдаемыми максимумами в спектре стабิโลграммы спокойно стоящего человека. Этот результат подтвержден серией экспериментов, в ходе которых определялись и сравнивались спектральные характеристики стабิโลграммы человека как при свободном стоянии, так и в условиях ограниченной подвижности всех суставов за исключением голеностопного (эксперименты проводились совместно с сотрудниками лаборатории №9 ИППИ). Построена упрощенная модель, описывающая движения трехзвенника на низшей собственной частоте. Предложенная модель описывает изменения голеностопного, коленного и тазобедренного суставных углов при малых отклонениях от вертикальной позы. Она уточняет модель перевернуто-

го маятника, традиционно используемую при анализе вопросов связанных со стабилизацией вертикальной позы человека.

Вторая работа посвящена попытке описания эффектов, полученных в эксперименте по стабилизации вертикальной позы человека на медленно наклоняемом основании. Задача управления ставится как задача построения адаптивного управления в условиях неизвестного квазистационарного возмущения. Применение метода, аналогичного методу скоростного градиента, позволяет построить модель удержания человеком вертикальной позы, описывающую экспериментальные явления. Строится упрощенная модель, задаваемая линейным уравнением первого порядка, описывающая медленные, низкочастотные составляющие стабилизации движения. Эта модель позволяет описать качественные закономерности, присущие движениям на указанных характерных временах, оценить параметры системы и провести планирование дальнейших экспериментов.

Опыт участия в экспериментальных биомеханических исследованиях показывает необходимость разработки методов повышения точности получаемой при измерениях информации. Традиционный способ заключается в многократном повторении исследуемого движения и последующем осреднении результатов измерений по ансамблю реализаций. Такой способ оказывается затруднительным при проведении анализа движения больных, в особенности детей. К тому же такая процедура эффективна для исследования наиболее общих характеристик движения. Для выявления индивидуальных особенностей отдельной реализации указанный способ непригоден. В связи с этим в третьей работе сборника обсуждается возможность уточнения измерительной информации путем комплексирования показаний разнородных измерительных датчиков с использованием математической модели движения. Приводятся простейшие алгоритмы комплексирования двумерной системы видеонализа и стабиллометрической платформы. Обсуждаются возможные варианты использования информации стабиллометрической платформы для уточнения показаний системы видеонализа.

В заключительной работе сборника рассмотрен пример математического моделирования позы больных с симптомокомплексами rectus-синдром и hamstring-синдром. Эти больные относятся к группе больных с заболеваниями детского церебрального паралича. Моторика нижних конечностей для них характеризуется повышенным тонусом двусуставных мышц бедра. Построенная математическая модель описывает распространенный вариант сохранения вертикальной позы у таких больных: близкое к вертикальному положение туловища на полусогнутых конечностях. Поза больного определяется в результате решения задачи минимизации функционала на

многообразии. Многообразие задается уравнениями равновесия и уравнениями сервосвязей. Последние моделируют работу нервной системы по «вертикализации» позы. Сравнения с результатами клинических наблюдений показало, что математическая модель удовлетворительно описывает исходную позу больного с тройным сгибанием в суставах нижних конечностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант № 02-01-00774) и программы Университеты России (договор УР.04.03.064).

Замечания и предложения присылать по адресу:

119992 Москва, МГУ, механико-математический факультет, кафедра прикладной механики и управления

или электронному адресу kruch@mech.math.msu.su

Трехзвенная математическая модель для задачи стабилизации вертикальной позы человека

*И. В. Новожиллов, А. В. Терехов, А. В. Забелин,
МГУ им. М.В.Ломоносова
Ю. С. Левик, В. Ю. Шлыков, О. В. Казенников
ИППИ РАН*

При исследовании вопросов, связанных со стабилизацией вертикальной позы человека, традиционно применяется модель перевернутого маятника [1,2]. Модель подразумевает, что при исследовании указанной задачи наиболее существенным показателем является отклонение центра масс человека от вертикали. Согласно модели перевернутого маятника, тело человека заменяется жестким стержнем, проходящим через центр масс человека и ось вращения голеностопного сустава. Таким образом, модель не учитывает подвижность в коленном и тазобедренном суставах.

Ограниченность такого подхода была продемонстрирована достаточно давно [3], тем не менее, модель продолжают широко использовать благодаря ее простоте и наглядности. На основании модели перевернутого маятника был выдвинут и проверен ряд принципиальных гипотез о механизмах работы системы управления человека [4-6].

Неприменимость указанной модели для анализа движений человека на резко возмущаемом основании [3] поставила исследователей перед необходимостью использовать более сложную модель, учитывающую подвижность в трех суставах: голеностопном, коленном и тазобедренном (см. Методы) [7,8].

Обычно, в работах, использующих трехзвенную модель, мышечные усилия заменяются упругими моментами в суставах. Такой подход, отчасти, некорректен, поскольку, во-первых, мышцы по своей природе могут оказывать преимущественно стягивающие усилия, во-вторых, значительная часть мышц является двусуставными. Подробнее об этих проблемах см. [9].

В данной работе предлагается трехзвенная модель, учитывающая основные особенности строения скелетно-мышечного аппарата. Проведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными из [1]. Описан результат серии экспериментов, позволяющих сравнить колебания человека при стабилизации вертикальной позы в двух условиях: при спокойном стоянии (СС) и при стоянии с ограниченной подвижностью (ОП) в коленном

и тазобедренном суставах. Результаты сопоставляются с данными модели. С помощью методов разделения движения [10] строится приближенная модель с одной независимой переменной, обладающая простотой и наглядностью модели перевернутого маятника и учитывающая подвижность в трех суставах. Проводится сравнение полной трехзвенной модели, приближенной трехзвенной модели и модели перевернутого маятника. Выявляется роль собственных колебаний в управлении движениями человека при стабилизации вертикальной позы. Важность исследования этого вопроса подчеркивалась Н. А. Бернштейном [12]. В работе высказывается гипотеза о связи собственных форм колебаний с двигательными синергиями по Бернштейну [11].

Методы

Методы математического моделирования

Для моделирования движений тела человека в сагиттальной плоскости предлагается использовать трехзвенную систему, звенья которой соединены последовательно с основанием и друг с другом посредством точечных шарниров (рисунок 1). Такая модель применима в предположении, что стопа не отрывается от земли, руки и голова неподвижны относительно корпуса, углы в одноименных суставах обеих ног совпадают. Подобная модель человеческого тела широко применяется [3,7,8,12-14]. Масс-инерционные характеристики звеньев принимаются равными масс-инерционным характеристикам левой и правой голени, рассматриваемых как одно тело - для нижнего звена, левого и правого бедра, рассматриваемых как одно тело - для среднего звена, корпуса, головы и рук, рассматриваемых как одно тело - для верхнего звена. Длины звеньев берутся равными расстояниям от оси вращения голеностопного сустава до оси коленного сустава, от оси коленного до оси тазобедренного, от оси тазобедренного сустава до центра масс верхнего звена, - для нижнего, среднего и верхнего звеньев соответственно. Для простоты предполагается, что центры масс звеньев (C_1, C_2, C_3) лежат на звеньях. Используемые

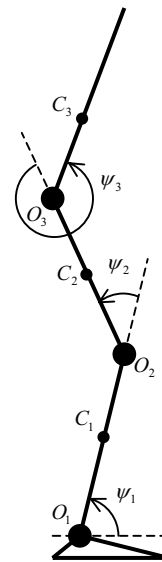


Рисунок 1. Трехзвенная система для описания тела человека.

при моделировании значения масс-инерционных характеристик и длин приведены в таблице 1 [15]. Моменты инерции (J_1, J_2, J_3) указаны относительно центров масс.

Положение описанной системы может быть задано тремя обобщенными координатами. В качестве таковых берутся суставные углы ψ_1, ψ_2, ψ_3 (рисунок 1). Согласно[1], в качестве вертикальной позы можно принять положение системы, соответствующее значениям углов ($\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0$), приведенным в таблице 2.

Таблица 1.

m_1	m_2	m_3	J_1	J_2	J_3
12кг	18кг	50кг	$1.1\text{кг} \cdot \text{м}^2$	$1.4\text{кг} \cdot \text{м}^2$	$2.1\text{кг} \cdot \text{м}^2$
$ O_1O_2 $	$ O_2O_3 $	$ O_1C_1 $	$ O_2C_2 $	$ O_3C_3 $	
0.50м	0.45м	0.25м	0.23м	0.18м	

Таблица 2.

ψ_1^0	ψ_2^0	ψ_3^0
83°	2°	-5°

Таблица 3.

α_3	β_3	σ_0	σ_1	σ_2	a_3	b_3	R_2	r_2	s_0	s_1	s_2
66°	66°	46°	8°	90°	10см	13см	6см	4см	6см	36см	3см

Система находится под действием силы тяжести и противодействующих ей мышечных усилий. В модели рассматриваются только двусуставные мышцы. Предполагается, что в стабилизации вертикальной позы участвуют три группы двусуставных мышц: группа задних двусуставных мышцы голени (далее обозначается индексом "1"), группа передних двусуставных мышц бедра (индекс "2"), группа задних двусуставных мышц бедра (индекс "3"). Здесь используется терминология из [16].

Для описания мышц используется "нитяная модель" [17], согласно которой в каждый момент времени мышца может быть заменена нитью соответствующей длины и натяжения, соединяющей точки крепления мышцы к скелету (рисунки 2А, 2Б). Для рассматриваемых групп мышц принята схема крепления из [12,13], приведенная на рисунках 2А, 2Б. В таблице 3 указаны используемые в модели значения геометрических параметров, полученных по [18]. Указанная схема успешно применялась при решении различных задач [8,12-14].

Для описания мышечных усилий принята λ -модель Фельдмана (гипотеза равновесной точки) [19]. Согласно этой модели, статические усилия, развиваемые мышцами, определяются текущей длиной мышцы и значением управляющего параметра λ , соответствующего порогу стретч-рефлекса. (рисунок 3). Применимость λ -модели Фельдмана для анализа вертикальной позы человека обсуждается в [20].

Предполагается, что вертикальная поза соответствует положению равновесия системы, задаваемому постоянными значениями управляющих параметров λ рассматриваемых групп мышц. Проводится линеаризация зависимости мышечных усилий от длины мышцы ℓ и управляющего параметра λ в окрестности равновесной длины ℓ^0 (рисунок 3). Линеаризованная зависимость имеет вид:

$$F(\ell, \lambda) = F(\ell^0, \lambda^0) + K(\delta\ell + \mu\delta\dot{\ell} - \delta\lambda) \quad (1)$$

где K - постоянный положительный коэффициент, имеющий размерность коэффициента жесткости, μ - постоянный положительный

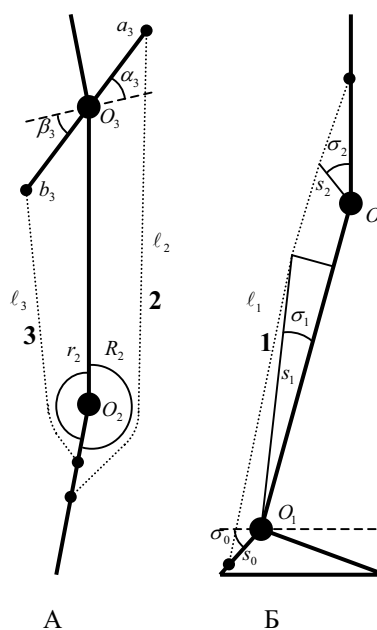


Рисунок 2. Принятая схема мышц. Мышцы обозначены частым пунктиром.

коэффициент, имеющий размерность коэффициента демпфирования. Линеаризация корректна при $F^0 = F(\ell^0, \lambda^0) > 0$.

Для простоты считается, что жесткости и коэффициенты демпфирования всех рассматриваемых мышц равны между собой:

$$K_1 = K_2 = K_3 = \kappa$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$$

С помощью уравнений Лагранжа 2-го рода выводятся уравнения движения системы. Пересчет мышечных усилий в обобщенные силы осуществлялся методом, описанным в [12]. Проводится линеаризация полученных уравнений. Для линеаризованной системы решается задача нахождение собственных частот. Для вычисления собственных чисел применяются стандартные функции среды MATLAB. Собственные частоты оказываются сильно разнесенными. Величина κ выбирается таким образом, чтобы низшая собственная частота приблизительно равнялась 0.3~0.4 Гц, что, согласно [1], соответствует основной частоте колебаний человека (подробнее см. далее раздел «основные колебания»).

Методами приближенного моделирования, описанными в [21], строится приближенная модель для медленных составляющих движения. Кроме того, строится модель, получающаяся из исходной путем наложения связей

$$\psi_2 = \psi_3 = 0, \quad (2)$$

что соответствует фиксации углов в колене и бедре. Для исходной модели в силу формулы (1) вычисляются усилия в икроножной мышце (группа задних двусуставных мышцы голени) в процессе колебаний.

Порядок проведения эксперимента и методы анализа экспериментальных данных.

В эксперименте принимали участие 9 человек мужского пола в возрасте от 15 до 50 лет. Все испытуемые были проинформированы о порядке проведения эксперимента и дали свое согласие на участие

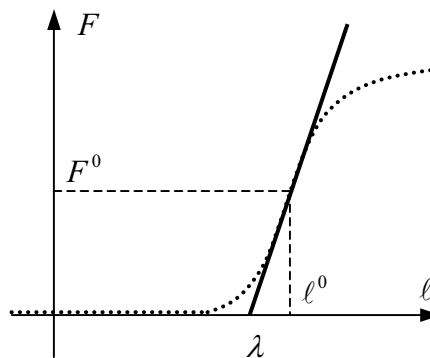


Рисунок 3. Модель Фельдмана (пунктир) и ее аппроксимация (сплошная линия).

в нем. В ходе эксперимента регистрировались показания стабилорафа. Частота съема сигнала - 50 Гц. Эксперимент проходил в двух условиях.

1) Условие спокойного стояния (СС). Испытуемый стоит на стабилорафе с закрытыми глазами в течение трех минут в привычной стойке. Руки испытуемого привязаны к корпусу ремнем.

2) Условие ограниченной подвижности (ОП). Испытуемый стоит на стабилорафе с закрытыми глазами в течение трех минут. Подвижность в коленном и тазобедренном суставах ограничена посредством трех деревянных планок, две из которых крепятся ремнями к ногам и корпусу со стороны живота, третья крепится к корпусу со стороны спины и затылку.

Испытуемых просили сообщать в случае возникновения чувства дискомфорта или болевых ощущений.

Проводился спектральный анализ полученных данных с помощью метода Велча (для высоких частот) и метода корреляций (для низких).

Пример спектральной характеристики, полученной методом корреляций, приведен на рисунке 4. Согласно [1], частоту, соответствующую первому пику спектра, будем называть частотой основных колебаний, а колебания на этой частоте - основными колебаниями.

Результаты

Математические модели

Построена математическая модель, описывающая движения человека вблизи вертикальной позы. В силу полученной модели, определены значения мышечных усилий, необходимых для того, чтобы положение, задаваемое углами из таблицы 2, соответствовало положению равновесия уравнений движения. Полученные значения оказываются положительными (таблица 4), что позволяет линеаризовать λ -модель Фельдмана. Проводится линеаризация уравнений построенной модели вблизи положения равновесия. В линейном приближении уравнения движения имеют вид:

$$A\delta\dot{\psi} + \mu\kappa L^T L\delta\dot{\psi} + (\kappa L^T L - G)\delta\psi = \kappa L\delta\lambda \quad (3)$$

здесь $\delta\psi = (\delta\psi_1 \ \delta\psi_2 \ \delta\psi_3)^T$ - отклонения углов от положения равновесия, $\delta\lambda = (\delta\lambda_1 \ \delta\lambda_2 \ \delta\lambda_3)^T$ - отклонения значений управляющих параметров, от соответствующих положению равновесия. Матрицы A , G , L имеют вид.

$$A = S^T \begin{pmatrix} J_1 + m_1 c_1^2 + m_2 L_1^2 + m_3 L_1^2 & (m_2 c_2 + m_3 L_2) L_1 \cos \psi_2^0 & m_3 c_3 L_1 \cos(\psi_2^0 + \psi_3^0) \\ (m_2 c_2 + m_3 L_2) L_1 \cos \psi_2^0 & J_2 + m_2 c_2^2 + m_3 L_2^2 & m_3 c_3 L_2 \cos \psi_3^0 \\ m_3 c_3 L_1 \cos(\psi_2^0 + \psi_3^0) & m_3 c_3 L_2 \cos \psi_3^0 & J_3 + m_3 c_3^2 \end{pmatrix} S$$

$$G = S^T \begin{pmatrix} -(m_1 c_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) g \sin \psi_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & -(m_2 c_2 + m_3 L_2) g \sin(\psi_1^0 + \psi_2^0) & 0 \\ 0 & 0 & -m_3 c_3 g \sin(\psi_1^0 + \psi_2^0 + \psi_3^0) \end{pmatrix} S$$

$$L = \begin{pmatrix} -s_0 \sin(\psi_1^0 - \sigma_0 + \sigma_1) & -\frac{s_2}{L_1 - s_1} (L_1 \sin(\psi_2^0 + \sigma_2) + s_1 \sin(\psi_1^0 - \sigma_0 + \sigma_1)) & 0 \\ 0 & R_2 & a_3 \cos(\psi_3^0 + \alpha_3) \\ 0 & -r_2 & -b_3 \cos(\psi_3^0 + \beta_3) \end{pmatrix}$$

где приняты обозначения:

$$L_1 = |O_1 O_2|, \quad L_2 = |O_2 O_3|, \quad c_1 = |O_1 C_1|, \quad c_2 = |O_2 C_2|, \quad c_3 = |O_3 C_3|$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Модель, описываемая (3), соответствует условию СС эксперимента. Далее ее будем называть трехзвенной моделью.

Согласно методам из [10] рассматривается вспомогательная система:

$$A \delta \ddot{\psi} + (\kappa L^T L - G) \delta \psi = 0 \quad (4)$$

получаемая из (3) при $\mu = 0$, $d\mu = 0$. Для системы (4) решается задача о нахождении собственных частот и собственных форм колебаний. Параметр κ выбирается в соответствии с [1] таким образом, чтобы низшая собственная частота равнялась 0.4 Гц, что соответствует основным колебаниям спокойно стоящего человека (см. раздел «основные колебания»). Отсюда:

$$\kappa \approx 8 \times 10^5 \frac{H}{M}$$

Полученные собственные векторы v_i , собственные частоты f_i и значения равновесных мышечных усилий F_i^0 приведены в таблице

Таблица 4.

F_1^0	F_2^0	F_3^0	f_1	f_2	f_3
$0.3 \cdot 10^4 H$	$1.5 \cdot 10^4 H$	$1.2 \cdot 10^4 H$	$0.4 \Gamma u$	$3.2 \Gamma u$	$9.0 \Gamma u$
v_1^T		v_2^T		v_3^T	
{0.7 -0.5 0.5}		{0.3 -0.7 0.6}		{0.4 -0.5 -0.8}	

Значительное разнесение собственных частот позволяет построить приближенную модель, описывающую движения с характерными временами порядка периодов низших собственных колеба-

ний. Применение методов из [21] к системе (3) позволяет получить приближенную модель, которая описывается одним дифференциальным уравнением и двумя алгебраическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \tilde{I}\delta\ddot{\psi}_1 + \tilde{R}\delta\dot{\psi}_1 + \tilde{K}\delta\psi_1 &= \mathbf{n} \cdot \text{дл} \\ \delta\psi_2 &= a_2\delta\psi_1 \\ \delta\psi_3 &= a_3\delta\psi_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Значение параметров, входящих в уравнения (5), приведены в таблице 5. Далее модель, описываемую (5), будем называть приближенной трехзвенной моделью.

Таблица 5.

\tilde{I}	\tilde{K}	a_2	a_3	\mathbf{n}
$35\text{кг} \cdot \text{м}^2$	194Н	-0.7	0.7	$\{-1.7 \quad -0.8 \quad -0.8\} \times 10^4 \text{Н/м}$

Посмотрим, как изменится поведение системы (3) после наложения связи (2). Такая модель соответствует условию ОП эксперимента.

$$\begin{aligned} I\delta\ddot{\psi}_1 + R\delta\dot{\psi}_1 + K\delta\psi_1 &= n\delta\lambda \\ \delta\psi_2 &= 0 \\ \delta\psi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Значения параметров, входящих в уравнения (6) приведены в таблице 6. Далее, модель описываемую (6), будем называть моделью перевернутого маятника.

Таблица 6.

I	K	n
$35\text{кг} \cdot \text{м}^2$	194Н	$-3 \times 10^4 \text{Н/м}$

В таблице 7 приведены сводные данные по собственным частотам для систем (3), (5), (6) при $\delta\lambda=0$.

Таблица 7.

Модели	Собственные частоты		
	низшая	средняя	высшая
трехзвенная	0.4 Гц	3 Гц	9 Гц
приближенная трехзвенная	0.4 Гц	-	-
перевернутого маятника	0.6 Гц	-	-

Основные колебания

В [1] на основании экспериментальных данных было замечено, что в сагиттальной стабิโลграмме покойно стоящего человека присутствуют колебания на частоте примерно 0.4 Гц. Эти колебания вслед за Гурфинкелем [1] будем называть основными колебаниями. В [22] высказано предположение, что основные колебания определяются жесткостью мышц. На основании этого параметр жесткости κ в (4) выбирался таким образом, чтобы низшая собственная частота системы соответствовала частоте основных колебаний.

Была проведена серия экспериментов. По экспериментальным данным для каждого испытуемого методом строились две спектральные характеристики: для условия СС и для условия ОП. Пример спектральных характеристик приведен на рисунке 4. По спектральным характеристикам определялись частоты основных колебаний (таблица 8).

Таблица 8.

Условия	ИСПЫТУЕМЫЕ									
	АЗ	АТ	ВБ	ДВ	ДК	ДТ	ПК	ПТ	ЮЛ	среднее
СС	0.35	0.35	0.55	0.35	0.3	0.5	0.25	0.5	0.25	0.35
ОП	0.7	0.4	0.65	0.65	0.4	0.65	0.4	0.65	0.35	0.55

Частоты приведены в Герцах.

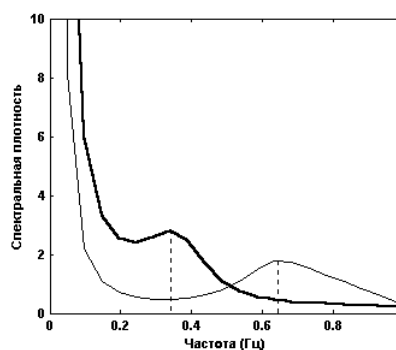


Рисунок 4. Спектральная характеристика испытуемого ДВ. Жирная линия соответствует условию СС, тонкая - условию ОП. Пунктиром обозначены пики, соответствующие основным колебаниям.

Из экспериментальных данных видно, что:

- в сагиттальной стабิโลграмме присутствуют колебания на частоте в среднем 0.4 Гц.

- при ограничении подвижности в суставах частота основных колебаний смещается в среднем до 0.6 Гц. Таким образом модели (3), (5), (6) удовлетворительно описывают экспериментально отмеченное увеличение основной частоты после наложения связей.

Как видно из таблицы 7, трехзвенная модель (условие СС), у которой низшая частота равняется примерно 0.4 Гц, после наложения связи (2) переходит в модель перевернутого маятника (условие ОП), у которой низшая частота равна примерно 0.6 Гц.

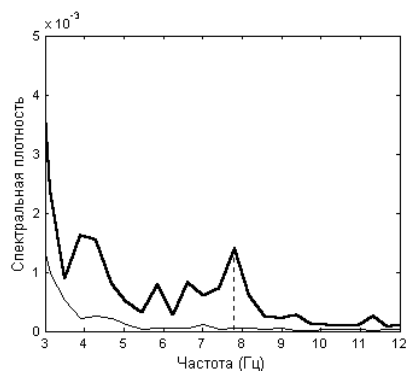


Рисунок 5. Спектральная характеристика испытуемого АЗ. Жирная линия соответствует условию СС, тонкая - условию ОП. Пунктиром обозначен пик, соответствующий высокочастотным колебаниям.

Высокочастотные колебания

В [1] приведены данные о наличии в сагиттальной стабилотграмме спокойно стоящего человека колебаний с высокой частотой (7-12 Гц) и малой амплитудой (в десятки раз меньше, чем у основных колебаний). Анализ электромиограммы (ЭМГ) икроножной мышцы [1] показал, что в ЭМГ присутствуют вспышки активности, имеющие частоту высокочастотных колебаний. На основании совместного анализа ЭМГ и стабилотграммы в [1] сделано заключение о коррелированности максимумов высокочастотных колебаний (соответствующих смещению центра давления вперед) и вспышек активности ЭМГ. На вкладке приведен рисунок I из [1], иллюстрирующий описанные явления.

Нами проведена серия экспериментов. Анализировались высокочастотные (5-12 Гц) области спектра испытуемых в условиях СС и ОП. Примеры спектральных характеристик приведены на рисунке 5. В таблице 9 приведены частоты заметных пиков в области высоких частот. Прочерк означает отсутствие таких пиков. У всех испытуемых, кроме отмеченных звездочкой, величина высокочастотных пиков в условии СС в два и более раза выше, чем в условии ОП.

Таблица 9.

Условия	ИСПЫТУЕМЫЕ									
	АЗ	АТ	ВБ*	ДВ	ДК	ДТ	ПК	ПТ	ЮЛ*	среднее
СС	8	-	8	-	7	-	6	6.5	7.5	7
ОП	-	-	6.5	-	7	-	-	7	7.5	7

Частоты приведены в Герцах.

* У этих испытуемых величина пика в условии СС меньше чем в ОП.

Из приведенных данных следует:

- в сагиттальной стабиллограмме присутствуют высокочастотные колебания.
- максимумам высокочастотных колебаний соответствуют вспышкам активности в ЭМГ.
- амплитуда высокочастотных колебаний становится заметно меньше после закрепления коленного и тазобедренного суставов.

Как видно из таблицы 7, высшая собственная частота трехзвенной модели равна 9 Гц, т.е. лежит в указанном в [1] диапазоне и согласуется с экспериментальными данными из таблицы 9.

Собственные колебания приводят к колебаниям длины икроножной мышцы, что, согласно формуле (1), приводит к колебаниям развиваемой мышцей усилий, а, следовательно, и ЭМГ. С другой стороны, стабиллограмма пропорциональна моменту в голеностопном суставе [12]. Таким образом, коррелированность ЭМГ и высокочастотных колебаний согласуется с моделью Фельдмана.

Ограничению подвижности суставов (условие ОП) соответствует модель перевернутого маятника. Как видно из таблицы 7, модель перевернутого маятника имеет одну частоту примерно 0.6 Гц. Согласно модели перевернутого маятника, в условии ОП не должны наблюдаться пики в области высоких частот. Поскольку в ходе эксперимента нельзя полностью зафиксировать суставы, эти пики сохраняются, но их величина заметно уменьшается у большинства испытуемых.

Обсуждение

Сравнение моделей

На настоящий момент при исследовании механизмов стабилизации вертикальной позы широко применяется модель перевернутого маятника. В данной работе предложены две модели: трехзвенная модель и приближенная трехзвенная модель. Сравним три указанные модели.

Модель перевернутого маятника высокой наглядностью и простотой. Она описывается одним дифференциальным уравнением второго порядка. Модель неприменима для исследования медленных движений под действием возмущений имеющих малые характерные времена [3]. Модель не позволяет различать степень участия различных мышц в изменении положения тела человека.

Трехзвенная модель описывает движения человека с учетом подвижности в голеностопном, коленном и тазобедренном суставах. Модель позволяет описать высокочастотные составляющие в спектре спокойно стоящего человека. Модель применима для исследования движений, имеющих широкий диапазон характерных времен (от десятых долей секунды до секунд). Модель позволяет различать степень участия различных мышц в изменении положения тела человека. Модель описывается системой дифференциальных уравнений шестого порядка. Высокий порядок уравнений модели затрудняет ее аналитическое исследование.

Приближенная трехзвенная модель является простой и наглядной. Она описывается одним дифференциальным уравнением второго порядка и двумя линейными алгебраическими соотношениями. Модель позволяет учесть изменение углов в голеностопном, коленном и тазобедренном суставе при стоянии и различать степень участия различных мышц в изменении положения тела человека. Модель применима для исследования медленных движений на характерных временах порядка секунд.

О связи собственных форм и синергий

Общее решение системы (4) может быть записано как сумма собственных колебаний. Качественный вид собственных форм колебаний приведен на рисунке 6. В силу системы (4), произвольное малое отклонение человека от вертикальной позы может быть представлена как суперпозиция отклонений по собственным формам [8]. Можно предположить, что двигательные синергии по Бернштейну [11] соответствуют собственным формам колебаний. Иначе говоря, нервная система "конструирует" произвольное отклонение от положения равновесия из отклонений

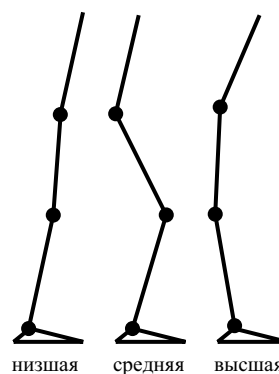


Рисунок 6. Графическое представление собственных форм колебаний трехзвенной модели.

по собственным формам. Соображения о связи двигательных синергий и собственных характеристик механической системы, описывающей тело человека, высказывались ранее в [7]. В этой статье рассматривались собственные значения и собственные формы, возникающие лишь за счет силы тяжести – без учета мышечных воздействий

Выводы

В настоящей работе построена математическая модель стабилизации вертикальной позы человека, учитывающая особенности скелетно-мышечного аппарата. Проведена серия экспериментов, в ходе которой анализировалось влияние ограничения подвижности в коленном и тазобедренном суставе на частотные характеристики стоящего человека. Построена приближенная математическая модель, обладающая простотой модели перевернутого маятника и учитывающая подвижность в голеностопном, коленном и тазобедренном суставах. Высказана гипотеза о связи собственных форм колебаний и синергий по Бернштейну.

Работа осуществлена при поддержке РФФИ (грант 02-04-48234).

Литература

1. Гурфинкель В. С., Коц Я. М., Шик М. Л. Регуляция позы человека. - М. Наука, 1965.
2. Winter D. A., Patla A. E., Rietdyk S., Ishac M. G. Ankle muscle stiffness in the control of balance during quiet standing.// J Neurophysiology, 85(6), 2001.
3. Horak F. B., Nashner L. M. Central programming of postural movements: adaptation to altered support surface configurations.// J Neurophysiology, 62, 1986.
4. Collins J. J., De Luca C. J. Open-loop and close-loop control of posture: a random walk analysis of center-of-pressure trajectories.// Experimental Brain Research 95, 1993.
5. Gurfinkel V. S., Ivanenko Yu. P., Levik Yu. S., Babakova I. A. Kinesthetic reference for human orthograde posture.// Neuroscience, 68(1), 1995.
6. Morasso P. G., Baratto L., Capra R., Spada G. Internal models in the control of posture.// Neural Networks 12, 1999.
7. Alexandrov A. V., Frolov A. A., Horak F. B., Carlson-Kuhta P., Park S. Strategies of feedback equilibrium control during human upright standing.// J Biomechanics, in press.

8. Terekhov A. V. Orthograde posture stabilization as a superposition of biarticular muscles-based eigenforms (synergies).// *Current Research In Motor Control II*, Katowice, 2004. PP. 223-230.
9. Latash M. L. Zatsiorsky V. M. Joint stiffness: myth or reality?// *Human Movement Science* 12, 1993.
10. Новожилов И. В. Фракционный анализ. - М. Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1995.
11. Бернштейн Н. А. Физиология движений и активность. - М. Наука, 1990.
12. Новожилов И.В. и др. Математическое моделирование сгиба-тельно-разгибательных движений нижних конечностей при изменении вертикальной позы человека. – М. Изд-во мех-мат ф-та МГУ. 2001 г.
13. Копылов И. А., Кручинин П. А., Новожилов И. В. О реализуемости движений по Н. А. Бернштейну// *Известия РАН. МТТ*. 2003. N 5. С. 39-49.
14. П. А. Кручинин. Математическое моделирование поздних нарушений больного при rectus-синдроме.// *Новые технологии в медицине: сб. докл. Первой международной дистанционной науч.-практ. конф.* - СПб. 2004. С.116-118..
15. П. И. Бегун, Ю. А. Шукейло. Биомеханика. – СПб. Политехника. 2000.
16. Привес М.Г., Лысенков Н.К., Бушкович В.И. Анатомия человека. – Ленинград, Медицина. 1974.
17. Воронов А. В. Роль одно- и двусуставных мышц нижних конечностей при наземной локомоции.// *Физиология человека*. 23(3). 2004.
18. Rohen J. W., Yokochi C., Lutien-Drecoll E. Color atlas of anatomy: a photographic study of the human body - Lippincott Williams and Wilkins, 2002.
19. Фельдман А. Г. Центральные и рефлекторные механизмы управления. - М. Наука, 1979.
20. Micheau P., Kron A., Bourassa P. Evaluation of the lambda model for human postural control during ankle strategy.// *Biological Cybernetics*. 89, 2003.
21. Влахова А. В., Новожилов И. В. Разделение движений разно-частотной механической системы, не содержащей явно "малых" или "больших" параметров// *Известия РАН. МТТ*. 2003. N 1.
22. Гурфинкель В. С., Липшиц М. И., Попов К. Е. Является ли рефлекс на растяжение основным механизмом в системе регуляции вертикальной позы человека?// *Биофизика*. 19(4). 1974.

Математическая модель процесса стабилизации вертикальной позы человека при медленных возмущениях основания.

А. В. Терехов

МГУ им. М.В.Ломоносова

Рассматривается задача стабилизации вертикальной позы человека в сагитальной плоскости. Анализ спектра этого движения обнаруживает присутствие низкочастотных составляющих (ниже 0.2Гц) [1]. В [2] приведены результаты экспериментов, позволяющих выделить движения с большими характерными временами (порядка десятков секунд). В [3] высказано предположение, что стабилизация вертикальной позы человека организована иерархически и образована, по меньшей мере, двумя уровнями: первый отвечает за задание системы отсчета, в которой осуществляется процесс стабилизации, второй реализует процесс стабилизации. Согласно [2], низкочастотные составляющие движения могут соответствовать работе первого уровня стабилизации.

Ниже предлагается математическая модель, позволяющая описать указанные низкочастотные составляющие движения и учитывающая предложенную в [3] структуру управления стабилизацией вертикальной позы человека.

Описание эксперимента

Эксперимент, описанный в работе [2] состоит в следующем. Испытуемый стоит с закрытыми глазами на изначально неподвижной платформе (рисунок 1). Платформа наклоняется в сагитальной плоскости либо равномерно на 1° за 20 секунд, либо по синусоидальному закону с амплитудой 1.5° и периодом 160 секунд. Измеряется угол отклонения корпуса относительно платформы и относительно вертикали по линейным смещениям характерных точек груди и голени.

Анализ экспериментальных данных показывает:

1) В случае синусоидального возмущения

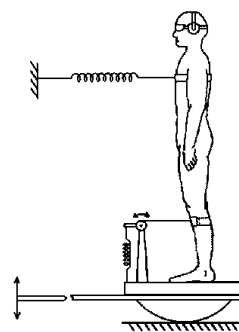


Рисунок 1. Условия эксперимента (рисунок из [2]).

человек отклоняется от вертикали по закону, близкому к синусоидальному, с той же частотой, с коэффициентом усиления по амплитуде в пределах 0.5-2.0 и с отставанием по фазе в пределах 270°-330°. Коэффициент усиления и фазовый сдвиг можно считать постоянными для каждого испытуемого.

2) В случае равномерного наклона платформы наблюдались переходные процессы, близкие к экспоненциальным с постоянной времени около 10 с (рисунок 3).

В [2] высказано предположение, что наблюдаемые фазовые сдвиги и переходные процессы объясняются большими постоянными времени, присущими уровню построения системы отсчета. В статье высказано также предположение, что в описанном эксперименте единственной доступной для обеих уровней афферентной информацией является проприоцептивная (информация от мышечных, сухожильных, суставных рецепторов и от рецепторов давления стопы).

Математическая модель

Тело человека моделируется жестким стержнем, совершающим плоские вращения в голеностопном суставе (рисунок 2). Здесь θ - угол отклонения прямой, соединяющей центр масс тела с суставом, от вертикали, α - угол наклона основания, β - угол поворота тела в голеностопном суставе относительно основания. Тогда $\theta = \beta + \alpha$. В силу малости углов (α, β, θ), будем рассматривать линейное приближение по этим углам.

Предполагается, что вертикальное положение стабилизируется за счет момента M , создаваемого мышцами в голеностопном суставе. Стопа считается неподвижной относительно платформы. Для описания мышечных усилий используется модель Фельдмана [4], что в случае малых углов дает следующее выражение:

$$M = K(\beta + u) + R\dot{\beta}$$

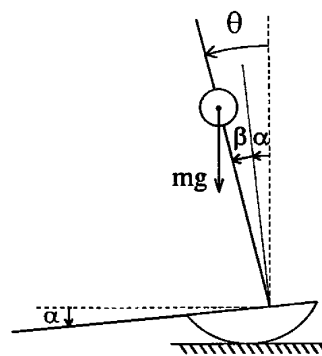


Рисунок 2. Модель тела человека (рисунок из [2]).

где K - коэффициент жесткости, R - коэффициент трения, u - управляющий параметр.

Запишем уравнение движения:

$$I\ddot{\beta} = mgh\beta - K(\beta + u) - R\dot{\beta} + mgh\alpha - I\ddot{\alpha} \quad (1)$$

здесь I - момент инерции тела человека, относительно оси, проходящей через голеностопные суставы, m - масса человека, h - высота центра масс.

Будем полагать, что реализация второго уровня стабилизации, осуществляется только за счет момента упруго-вязких сил. Тогда, потребуем $K > mgh$ и $R > 0$. Значение параметров K и R выбираются таким образом, чтобы общее решение системы (1) имело слабозатухающий колебательный характер с частотой 0.3 Гц. Согласно [1] эта частота соответствует основным колебаниям спокойно стоящего человека.

Предположим также, что в первом уровне стабилизации формируется управление u , доставляющее оценку $\tilde{\alpha}$ отклонения платформы от горизонта, т. е. формируется модель "системы отсчета". Примем

$$u = \tilde{\alpha} \quad (2)$$

Для построения оценки $\tilde{\alpha}$ воспользуемся методами адаптивного управления из [5]. Согласно предложенной в [5] схеме, необходимо задать целевую функцию управления. В рассматриваемой задаче в качестве целевой функции естественно принять величину квадрата отклонения корпуса от вертикали.

$$Q = \frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1}{2}(\beta + \alpha)^2 \quad (3)$$

Предположим, что α - квазистационарно. Указанное предположение для условий эксперимента [2] выполнено, т.к. возмущение по α существенно более медленное, чем собственное движение системы (1) по β . В соответствии с методиками [5], оценку для α ищем в виде

$$\tilde{\alpha} = -A \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} \frac{d^2 Q}{dt^2} \quad (4)$$

где производные вычисляются в силу уравнений (1), (2).

Продолжав вычисления, получим на основании (1)-(4)

$$\dot{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{T}(\beta + \tilde{\alpha}) \quad (5)$$

где T - некоторая положительная константа размерности времени. Следует заметить, что, согласно модели Фельдмана [4], величина $\beta + \tilde{\alpha}$ пропорциональна активности мотонейронного пула, которая определяется центральными установками $\tilde{\alpha}$ и информацией от проприоцепторов β .

Аналогичный алгоритм стабилизации предложен и экспериментально проверен в [6] для управления роботом.

Для устойчивости системы (1), (2), (5) необходимо, чтобы выполнялось соотношение (6):

$$T > \frac{I}{R} \cdot \frac{K}{K - mgh} \quad (6)$$

Поскольку представляющие интерес процессы имеют большие характерные времена, чем характерные времена собственных колебаний маятника из (1), то можно построить приближенную модель, описывающую медленные составляющие движения. Для этого воспользуемся методами из [7]. Приближенная модель описывается одним дифференциальным уравнением первого порядка:

$$T \left(\frac{K - mgh}{mgh} \right) \dot{\theta} + \theta = T \left(\frac{K}{mgh} \right) \dot{\alpha} \quad (7)$$

Результаты компьютерного моделирования для случая равномерного наклона платформы приведены на рисунке 4.

Использовались следующие значения параметров:

$$mgh = 800H \cdot м$$

$$I = 100кг \cdot м^2$$

$$T = 15с$$

$$K = 1200H \cdot м$$

$$R = 30H \cdot м/с$$

При выборе масс-инерционных характеристик использовались данные из [8]. На настоящий момент не существует единого мнения относительно значений упруго-вязких характеристик момента в голеностопном суставе при стабилизации вертикальной позы (см. [9-10]). Поэтому параметры K , R , T идентифицировались по данным эксперимента из [2] в рамках сформулированной математической модели (1), (2), (5). Параметр K выбран из условия, что собственная частота уравнения (1) должна быть равной 0.3Гц (см. выше). Параметр T определен графиками на рисунке 3. Коэффициент R не входит в уравнение (7), поэтому можно считать, что трение несущественно сказывается на медленных составляющих движения. При заданной величине T , коэффициент R определялся из (6).

В случае синусоидального возмущения численное интегрирование системы (1), (2), (5) и уравнения (7) показал, что при выбранных значениях параметров запаздывание по фазе переменной θ относительно α составляет 285° , что согласуется с экспериментальными данными из [2].

Выводы

Предложенная математическая модель описывает результаты экспериментов из [2]. Модель учитывает гипотезу о двухуровневой структуре механизма стабилизации вертикальной позы [3]. Алгоритм стабилизации использует только информацию от проприоцепторов, что согласуется с предположениями из [2] и данными о чувствительности вестибулярного аппарата [11].

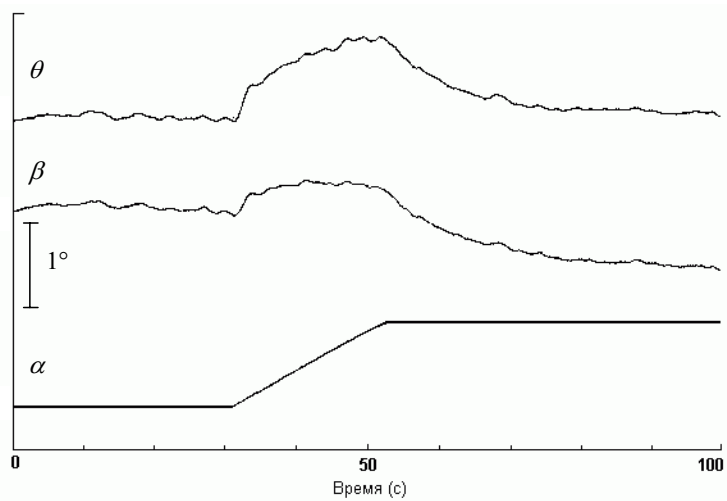


Рисунок 3. Относительные изменения углов в ходе медленного наклона платформы. Кривые получены в результате осреднения по всем испытуемым. По данным из [2].

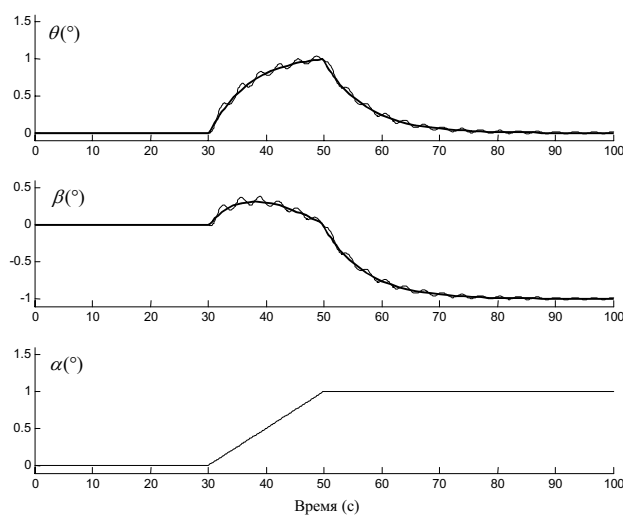


Рисунок 4. Результаты компьютерного моделирования. Тонкой линией обозначены результаты счета для точной модели (1), (2), (5), жирной - для приближенной (7).

Литература

1. Гурфинкель В. С., Коц Я. М., Шик М. Л. Регуляция позы человека. - М. Наука, 1965.
2. Gurfinkel V. S., Ivanenko Yu. P., Levik Yu. S., Babakova I. A. Kinesthetic reference for human orthograde posture.// *Neuroscience*, 68(1), 1995.
3. Lestienne F. G., Gurfinkel V. S. Posture as an organizational structure based on a dual process: a formal basis to interpret changes of posture in weightlessness. // *Progress in Brain Research*, 76, 1988.
4. Фельдман А. Г. Центральные и рефлекторные механизмы управления. - М. Наука, 1979.
5. Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах. - М. Наука, 1990.
6. Ito S., Nishigaki T., Kawasaki H. Upright posture stabilization by ground reaction force control.// *Proceeding of the International Symposium on Measurement, Analysis and Modeling of Human Functions*. - Sapporo. 2001.
7. Новожилов И. В. Фракционный анализ. - М. Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1995.
8. Бегун П.И., Шукейло Ю.А. Биомеханика. - СПб, Политехника, 2000.
9. Winter DA, Patla AE, Rietdyk S, Ishac MG. Ankle muscle stiffness in the control of balance during quiet standing.// *J Neurophysiol*, 85(6), 2001.
10. Morasso PG, Sanguineti V. Ankle muscle stiffness alone cannot stabilize balance during quiet standing.// *J Neurophysiol*, 88(4), 2002.
11. Fitzpatrick R., McCloskey D. I. Proprioceptive, visual and vestibular thresholds for the perception of sway during standing in humans.// *J Physiology*, 478(1), 1994.

О возможностях совместной обработки показаний системы видеонализа движений и стабилметрической платформы

Кручинин П.А., Мишанов А.Ю.

МГУ им. М.В.Ломоносова

Саенко Д.Г.

ИМБП РАН

В настоящее время в различных областях клинической и экспериментальной медицины используются инструментальные методы анализа локомоций. При этом для повышения точности исследований часто используется набор измерительных датчиков, избыточный с точки зрения математических моделей, традиционных при описании движения. Точность отдельных измерений, как правило, невелика, например, из-за погрешностей крепления датчиков на теле человека. В такой ситуации представляет интерес анализ возможности комплексирования информации от различных измерительных датчиков с целью повышения точности и достоверности получаемых данных, восстановления утраченных данных и т.д.

В настоящей статье рассмотрена задача комплексирования информации, полученной при одновременных измерениях посредством комплекса видеонализа движений с одной видеокамерой и стабилметрической платформы. Рассмотрим пример исследования движений типа приседания и вставания.

Опишем одну из традиционных схем эксперимента по определению усилий в мышцах по показаниям видеокамеры. На характерные точки на теле человека наклеиваются светоотражающие элементы (катафоты) (См. рис II на вкладке). Человек совершает движения записываемые одной или несколькими видеокамерами.

При компьютерной обработке видеозаписи определяются положения характерных точек (вручную оператором, либо автоматически в результате работы компьютерной программы). По координатам этих точек вычисляются углы в суставах скелетного многозвенника. Силы определяются в результате решения обратной задачи механики. Эта задача некорректна, поскольку при ее решении приходится дважды численно дифференцировать оценки суставных углов, содержащие измерительные и вычислительные погрешности. Для борьбы с такими погрешностями приходится осреднять измерения по нескольким реализациям [1]. При этом теряются индивиду-

альные особенности единичного движения. Проблему обработки единичной реализации частично можно разрешить используя процедуры сглаживания, как например в [2]. Такой прием искажает относительно высокочастотные составляющие движения. В связи с этим представляет интерес изучение возможностей уточнения показаний систем видеоанализа.

Вторым недостатком таких систем является наличие сбоев при обработке изображений. Эти сбои возникают, например, если один из светоотражающих элементов закрыт при съемках одной видеокамеры рукой или другой частью тела человека. В этом случае на некотором интервале времени информация об одном или двух из углов многозвенника может оказаться утерянной. Аналогичная ситуация возможна и при автоматической обработке изображения, когда два светоотражающих элемента оказались в кадре рядом. Проблемы различения этих датчиков также может разрешаться с использованием дополнительной информации.

Источником этой информации может являться стабилметрическая платформа (стабилограф) – прибор, измеряющий нормальную реакцию опоры и координаты точки приложения ее равнодействующей (центр давления).

Для определенности, рассмотрим задачу исследования движения человека в сагиттальной плоскости при вставании и приседании. Соответствующий эксперимент проводился при участии авторов статьи в ИМБП РАН. Человек выполнял комплекс движений. При движении человек не отрывал пяток от поверхности. Туловище и голову держал прямо. Руки держал скрещенными, прижимая их к туловищу. Движения записывались видеокамерой с частотой 25 кадров в секунду. При совершении движений испытуемый был повернут левым боком к видеокамере, стоя на стабилграфической платформе МБН. При компьютерной обработке видеозаписи положение характерных точек указывалось вручную. После этого определялись координаты опорных точек на экране.

Силы определялись в результате решения плоской обратной задачи динамики по полученным значениям координат точек. Использовалась математическая модель плоского движения скелетного многозвенника, образованного голенью, бедром и корпусом человека [3,4]. В рамках этой модели считалось, что стопа неподвижна и не отрывается от пола, голова и руки неподвижны относительно корпуса, корпус не изменяет своей конфигурации при изменении позы. Для решения этой задачи [5] записаны динамические уравнения, в пакете MATLAB составлена программа вычисления по координатам точек углов между звеньями. Значения угловых скоростей и ускоре-

ний получены в результате конечноразностного численного дифференцирования. Предполагалось использовать полученные значения при решении обратной задачи динамики – задачи определения моментов в суставах по измеренным значениям углов. Для удаления высокочастотной составляющей ошибки использовалась процедура оконного сглаживания окном Ханна длиной 0.4 секунды. Значительная длина окна (примерно 1/3 характерного масштаба движений) приводит к погрешностям в определении углов.

Используем результат этого эксперимента для анализа возможности коррекции полученных значений углов по показаниям стабилометрической платформы и для анализа возможности использования показаний стабилографа для восстановления “потерянных” значений углов в суставах многозвенника.

1. Математическая модель эксперимента

1.1. Вывод динамических уравнений

Для описания алгоритма обработки видеоизображения запишем уравнения движения антропоморфного трехзвенника в сагитальной плоскости.

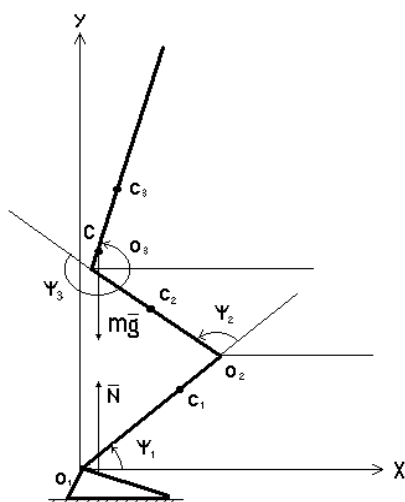


Рисунок 1. Обобщенные координаты для антропоморфного трехзвенника

Введем неподвижную систему координат O_1XY . За начало системы координат примем центр голеностопного сустава. Схема скелетного трехзвенника, изображена на рисунке 1. Его положение опишем углами ψ_1, ψ_2, ψ_3 .

Через O_1, O_2, O_3 обозначены центры голеностопного, коленного и тазобедренного суставов, через C_1, C_2, C_3 - центры масс соответствующих звеньев, через

$L_i = |O_i O_{i+1}|$ - обозначены

длины звеньев, а

$a_i = |O_i C_i|$ - расстояния от

нижней оконечности звена

до его центра масс. Обозначим через m_i - массу i -го звена, I_i - его момент инерции.

Составим уравнения движения в форме уравнений Лагранжа.

Центры масс звеньев в системе O_1XY имеют координаты

$$C_1 = (a_1 \cos \psi_1, a_1 \sin \psi_1) \quad (1.1)$$

$$C_2 = (L_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos(\psi_1 + \psi_2), L_1 \sin \psi_1 + a_2 \sin(\psi_1 + \psi_2)) \quad (1.2)$$

$$C_3 = (L_1 \cos \psi_1 + L_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) + a_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3), L_1 \sin \psi_1 + L_2 \sin(\psi_1 + \psi_2) + a_3 \sin(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)) \quad (1.3)$$

Вычислим квадраты скоростей центров масс звеньев. Из (1.1) получим проекции скорости точки C_1 на координатные оси O_1XY

$$V_{C_1} = (-a_1 \dot{\psi}_1 \sin \psi_1, a_1 \dot{\psi}_1 \cos \psi_1)$$

Тогда

$$V_{C_1}^2 = a_1^2 \dot{\psi}_1^2 \quad (1.4)$$

Из (1.2)

$$V_{C_2} = (-L_1 \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 - a_2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \sin(\psi_1 + \psi_2), L_1 \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 + a_2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \cos(\psi_1 + \psi_2))$$

Тогда

$$\begin{aligned} V_{C_2}^2 &= L_1^2 \dot{\psi}_1^2 \sin^2 \psi_1 + a_2^2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)^2 \sin^2(\psi_1 + \psi_2) + \\ &+ 2L_1 \dot{\psi}_1 a_2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \sin \psi_1 \sin(\psi_1 + \psi_2) + \\ &+ L_1^2 \dot{\psi}_1^2 \cos^2 \psi_1 + a_2^2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)^2 \cos^2(\psi_1 + \psi_2) \\ &+ 2L_1 \dot{\psi}_1 a_2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2) = \\ &= L_1^2 \dot{\psi}_1^2 + a_2^2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)^2 + 2L_1 a_2 \dot{\psi}_1 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \cos \psi_2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из (1.3) следует

$$\begin{aligned} V_{C_3} &= (-L_1 \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 - L_2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \sin(\psi_1 + \psi_2) \\ &\quad - a_3 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \sin(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3), \\ &\quad L_1 \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 + L_2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \cos(\psi_1 + \psi_2) + \\ &\quad + a_3 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} V_{C_3}^2 &= L_1^2 \dot{\psi}_1^2 \sin^2 \psi_1 + L_2^2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)^2 \sin^2(\psi_1 + \psi_2) + \\ &+ a_3^2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3)^2 \sin^2(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2L_1L_2 \dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \sin \psi_1 \sin(\psi_1 + \psi_2) + \\
& +2L_2a_3(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \sin(\psi_1 + \psi_2) \sin(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) + \\
& +2L_1a_3\dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \sin \psi_1 \sin(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) + \\
& + L_1^2\dot{\psi}_1^2 \cos^2 \psi_1 + L_2^2(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)^2 \cos^2(\psi_1 + \psi_2) + \\
& \quad + a_3^2(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3)^2 \cos^2(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) + \\
& +2L_1L_2\dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2) + \\
& +L_2a_3(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \times \\
& \quad \times \cos(\psi_1 + \psi_2) \cos(\psi_1 + \psi_2) \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) + \\
& +2L_1a_3\dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \cdot \cos \psi_1 \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) \\
& = L_1^2\dot{\psi}_1^2 + L_2^2(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)^2 + a_3^2(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3)^2 + \\
& +2L_1L_2\dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \cos \psi_2 + \\
& +2L_2a_3(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \cos \psi_3 \\
& +2L_1a_3\dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \cos(\psi_2 + \psi_3)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Воспользовавшись соотношениями (1.4) - (1.6), запишем по теореме Кенига кинетическую энергию

$$\begin{aligned}
T &= \frac{m_1V_{c_1}^2}{2} + \frac{m_2V_{c_2}^2}{2} + \frac{m_3V_{c_3}^2}{2} + I_1 \frac{\dot{\psi}_1^2}{2} + \\
& + I_2 \frac{(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2)}{2} + I_3 \frac{(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2 + \dot{\psi}_3^2)}{2} = \\
& = \frac{m_1}{2} a_1^2 \dot{\psi}_1^2 + \frac{m_2}{2} (L_1^2 \dot{\psi}_1^2 + a_2^2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)^2) + \\
& + 2L_1a_2\dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \cos \psi_2 + \\
& + \frac{m_3}{2} (L_1^2 \dot{\psi}_1^2 + L_2^2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)^2 + a_3^2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3)^2) + \\
& + 2L_1L_2\dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \cos \psi_2 + \\
& + 2L_2a_3(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \cos \psi_3 + \\
& + 2L_1a_3\dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \cos(\psi_2 + \psi_3) + \\
& + \frac{I_1}{2} \dot{\psi}_1^2 + \frac{I_2}{2} (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2 + \dot{\psi}_3^2)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Перегруппировав слагаемые в (1.7) и обозначив коэффициенты при квадратных членах через A, B, C, D, E, F , запишем выражение для кинетической энергии в виде

$$\begin{aligned}
T = & A\dot{\psi}_1^2 + B\dot{\psi}_2^2 + C\dot{\psi}_3^2 + D\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2 + E\dot{\psi}_1\dot{\psi}_3 + \\
& + E\dot{\psi}_2\dot{\psi}_3 + F\dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)\cos\psi_2 + \\
& + m_3L_1a_3\dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3)\cos(\psi_2 + \psi_3) + \\
& + m_3L_2a_3(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3)\cos\psi_3
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$A = \frac{m_1}{2}a_1^2 + \frac{m_2}{2}L_1^2 + \frac{m_2}{2}a_2^2 + \frac{m_3}{2}L_1^2 + \frac{m_3}{2}L_2^2 + \frac{m_3}{2}a_3^2 + \frac{I_1}{2} + \frac{I_2}{2} + \frac{I_3}{2}$$

$$B = \frac{m_2}{2}a_2^2 + \frac{m_3}{2}L_2^2 + \frac{m_3}{2}a_3^2 + \frac{I_2}{2} + \frac{I_3}{2}$$

$$C = \frac{m_3}{2}a_3^2 + \frac{I_3}{2}$$

$$D = m_2a_2^2 + m_3L_2^2 + m_3a_3^2$$

$$E = m_3a_3^2$$

$$F = m_2L_1a_2 + m_3L_1L_2$$

Подставив выражение (1.8) в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \psi_i} = Q_i \quad (i=1,2,3)$$

и проделав необходимые вычисления, получим три уравнения вида

$$\begin{aligned}
2A\ddot{\psi}_1 + D\ddot{\psi}_2 + E\ddot{\psi}_3 + 2F(\ddot{\psi}_1 \cos\psi_2 - \dot{\psi}_1\dot{\psi}_2 \sin\psi_2) + \\
+ F(\ddot{\psi}_2 \cos\psi_2 - \dot{\psi}_2^2 \sin\psi_2) + \\
+ 2m_2L_2a_3(\ddot{\psi}_1 \cos\psi_3 - \dot{\psi}_1\dot{\psi}_3 \sin\psi_3) + \\
+ 2m_3L_2a_3(\ddot{\psi}_2 \cos\psi_3 - \dot{\psi}_2\dot{\psi}_3 \sin\psi_3) + \\
+ m_3L_2a_3(\ddot{\psi}_3 \cos\psi_3 - \dot{\psi}_3^2 \sin\psi_3) + \\
+ 2m_3L_1a_3(\ddot{\psi}_1 \cos(\psi_2 + \psi_3) - \dot{\psi}_1(\dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \sin(\psi_2 + \psi_3)) + \\
+ m_3L_1a_3(\ddot{\psi}_2 \cos(\psi_2 + \psi_3) - \dot{\psi}_2(\dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \sin(\psi_2 + \psi_3)) + \\
+ m_3L_1a_3(\ddot{\psi}_3 \cos(\psi_2 + \psi_3) - \dot{\psi}_3(\dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \sin(\psi_2 + \psi_3)) = Q_1
\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
& 2B\ddot{\psi}_2 + D\ddot{\psi}_1 + E\ddot{\psi}_3 + F(\ddot{\psi}_1 \cos \psi_2 - \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2 \sin \psi_2) + \\
& + 2m_3 L_2 a_3 (\ddot{\psi}_1 \cos \psi_3 - \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_3 \sin \psi_3) + \\
& + 2m_3 L_2 a_3 (\ddot{\psi}_2 \cos \psi_3 - \dot{\psi}_2 \dot{\psi}_3 \sin \psi_3) + \\
& + m_3 L_2 a_3 (\ddot{\psi}_3 \cos \psi_3 - \dot{\psi}_3^2 \sin \psi_3) + \\
& + m_3 L_1 a_3 (\ddot{\psi}_1 \cos(\psi_2 + \psi_3) - \dot{\psi}_1 (\dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \sin(\psi_2 + \psi_3)) + \\
& + F\dot{\psi}_1 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \sin \psi_2 + \\
& + m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_1 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \sin(\psi_2 + \psi_3) = Q_2
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
& 2C\ddot{\psi}_3 + E(\ddot{\psi}_1 + \ddot{\psi}_2) + \\
& + m_3 L_2 a_3 ((\ddot{\psi}_1 + \ddot{\psi}_2) \cos \psi_3 - (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \dot{\psi}_3 \sin \psi_3) + \\
& + m_3 L_1 a_3 (\ddot{\psi}_1 \cos(\psi_2 + \psi_3) - \dot{\psi}_1 (\dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \sin(\psi_2 + \psi_3)) \\
& + m_3 L_2 a_3 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \sin \psi_3 + \\
& + m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_1 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3) \cdot \sin(\psi_2 + \psi_3) = Q_3
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь Q_1, Q_2, Q_3 - обобщенные силы, по [3,4] равны

$$\begin{aligned}
Q_1 &= -mgx_c + M_1 \\
Q_2 &= -m_3 g (L_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) + a_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)) \\
& - m_3 g a_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) + M_2 \\
Q_3 &= -m g a_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) + M_3
\end{aligned} \tag{1.12}$$

где M_1, M_2, M_3 - моменты в суставах многозвенника, создаваемые мышечными усилиями.

Проекции x_c и y_c центра масс трехзвенника на горизонтальную ось O_1X вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
x_c &= K_1 \cos \psi_1 + K_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) + K_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) \\
y_c &= K_1 \sin \psi_1 + K_2 \sin(\psi_1 + \psi_2) + K_3 \sin(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$K_1 = \frac{m_1 a_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1}{m}, \quad K_2 = \frac{m_2 a_2 + m_3 L_2}{m}, \quad K_3 = \frac{m_3 a_3}{m}.$$

1.2. Математическая модель показаний стабиллографа

Стабиллографическая платформа, или стабиллограф, представляет собой две металлические плиты, с установленными между ними тремя датчиками силы [6]. По показаниям датчиков программное обеспечение определяет вертикальную составляющую нормальной реакции и координаты точки приложения равнодействующей

нормальной реакции. Установка пациента на платформу происходит пятками к ребру с двумя датчиками, а носками – к ребру с одним датчиком. Точность определения точки приложения нормальной реакции составляет (+/-1 мм). Такая точность является допустимой для клинических исследований и относительно легко реализуется технически. Номинальная рабочая нагрузка платформы 20-120 кг. Рабочая частота съема информации 50Гц.

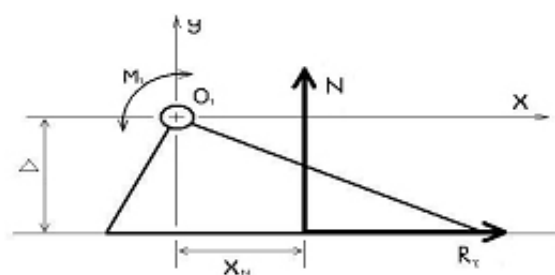


Рисунок 2. Силы и моменты, действующие на стопу.

лографа. Уравнение изменения момента количества движения стопы относительно оси голеностопного сустава примет вид

$$-M_1 + N \cdot x_N + R_r \cdot \Delta = 0$$

где M_1 - момент, создаваемый усилиями мышц в голеностопном суставе, R_r - продольная составляющая силы реакции, Δ - расстояние от оси голеностопного сустава до поверхности опоры.

Проведем оценку величины продольной составляющей силы реакции и ее момента относительно голеностопного сустава. Запишем теорему о движении центра масс трехзвенника в проекции на горизонтальную ось.

$$m\ddot{x}_c = R_r \quad (1.14)$$

Обозначим через N , x_N значения вектора нормальной реакции и координату X его точки приложения в осях O_1X . Эти величины выдает

в качестве измерений программное обеспечение стаби-

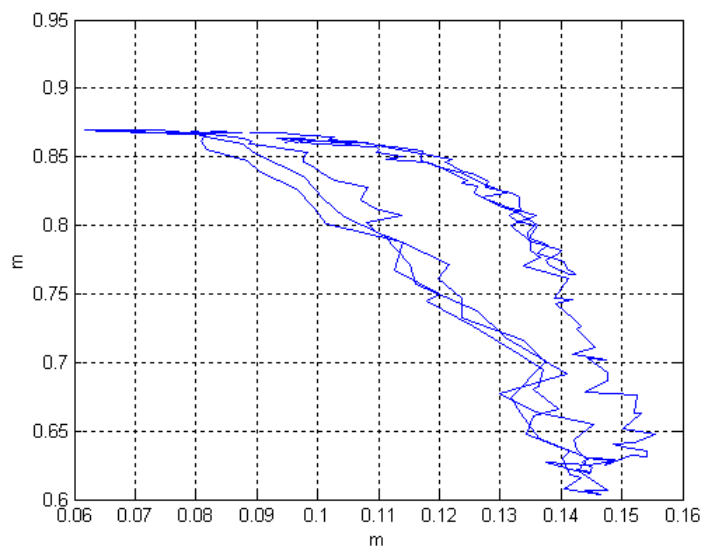


Рисунок 3. Траектории центра масс человека в проекции на сагиттальную плоскость (по результатам экспериментов, проведенных в ИМБП РАН)

На рис.3 приведены характерные траектории центра масс человека в проекции на сагиттальную плоскость, вычисленные по результатам обработки видеоизображения по (1.13). Анализ приведенных траекторий показывает, что во время движения $|\ddot{x}_c|$ не превышает $0.5m/c^2$, при вертикальной составляющей ускорения центра масс $|\ddot{y}_c| \sim 2m/c^2$. В проведенных экспериментах $|x_N| \sim 0.02m$. Считаем массу $m \approx 100\text{кг}$, и величину $\Delta \approx 0.08m$. Следовательно, R_r величина порядка 90 н, N величина порядка 1000 н. Тогда величина $N \cdot x_N$ имеет порядок 40 н·м, а величина $R_r \Delta$ - 7.5 н·м.

Эти расчеты позволяют предположить, что влияние продольной силы в стопе человека, мало и при дальнейших расчетах ее влиянием будем пренебрегать. Тогда момент в голеностопном суставе относительно O_1 вычисляется по показаниям стабиллографа по формуле

$$M_1 = N \cdot x_N \quad (1.15)$$

В соответствии с (1.12)

$$M_1 = Q_1 + mgx_c, \quad (1.16)$$

где Q_1 - находится из (1.9)

2. Коррекция угловых измерений по показаниям стабилографа

Рассмотрим задачу совместной обработки информации системы видеонаблюдений и стабилографа. Для постановки этой задачи линеаризуем полученные соотношения и представим их дискретный аналог.

Представим углы в виде суммы

$$\psi_j = \psi_{s_j} + \psi_{\Delta_j} \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

где ψ_{s_j} - “ опорные значения” углов (приближенные значения полученные на предварительном этапе исследования, которые выбираются отдельно для каждой конкретной задачи), ψ_{Δ_j} - поправка, разница между ψ_j и ψ_{s_j} , предполагаемая малой. Построим алгоритм определения ψ_{Δ_j} .

2.1. Линеаризованные соотношения

Подставим (1.15) и (1.9) в (1.16). Учитывая представление углов в виде (2.1), линеаризуем получившееся уравнение относительно опорных углов $\psi_{s_1}, \psi_{s_2}, \psi_{s_3}$

$$\begin{aligned}
N \cdot x_N = & 2A(\ddot{\psi}_{s_1} + \ddot{\psi}_{\Delta_1}) + D(\ddot{\psi}_{s_2} + \ddot{\psi}_{\Delta_2}) + E(\ddot{\psi}_{s_3} + \ddot{\psi}_{\Delta_3}) + \\
& + 2F((\ddot{\psi}_{s_1} + \ddot{\psi}_{\Delta_1})(\cos \psi_{s_2} - \psi_{\Delta_2} \sin \psi_{s_2}) - \\
& - (\dot{\psi}_{s_1} + \dot{\psi}_{\Delta_1})(\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{\Delta_2})(\sin \psi_{s_2} + \psi_{\Delta_2} \cos \psi_{s_2})) + \\
& + F((\ddot{\psi}_{s_2} + \ddot{\psi}_{\Delta_2})(\cos \psi_{s_2} - \psi_{\Delta_2} \sin \psi_{s_2}) - \\
& - (\dot{\psi}_{s_2}^2 + 2\dot{\psi}_{s_2} \dot{\psi}_{\Delta_2} + \dot{\psi}_{\Delta_2}^2)(\sin \psi_{s_2} + \psi_{\Delta_2} \cos \psi_{s_2})) + \\
& + 2m_3 L_2 a_3 ((\ddot{\psi}_{s_1} + \ddot{\psi}_{\Delta_1})(\cos \psi_{s_3} - \psi_{\Delta_3} \sin \psi_{s_3}) - \\
& - (\dot{\psi}_{s_1} + \dot{\psi}_{\Delta_1})(\dot{\psi}_{s_3} + \dot{\psi}_{\Delta_3})(\sin \psi_{s_3} + \psi_{\Delta_3} \cos \psi_{s_3})) + \\
& + 2m_3 L_2 a_3 ((\ddot{\psi}_{s_2} + \ddot{\psi}_{\Delta_2})(\cos \psi_{s_3} - \psi_{\Delta_3} \sin \psi_{s_3}) - \\
& - (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{\Delta_2})(\dot{\psi}_{s_3} + \dot{\psi}_{\Delta_3})(\sin \psi_{s_3} + \psi_{\Delta_3} \cos \psi_{s_3})) + \\
& + m_3 L_2 a_3 ((\ddot{\psi}_{s_3} + \ddot{\psi}_{\Delta_3})(\cos \psi_{s_3} - \psi_{\Delta_3} \sin \psi_{s_3}) - \\
& - (\dot{\psi}_{s_3}^2 + 2\dot{\psi}_{s_3} \dot{\psi}_{\Delta_3} + \dot{\psi}_{\Delta_3}^2)(\sin \psi_{s_3} + \psi_{\Delta_3} \cos \psi_{s_3})) + \\
& + 2m_3 L_1 a_3 ((\ddot{\psi}_{s_1} + \ddot{\psi}_{\Delta_1})(\cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})) - \\
& - (\psi_{\Delta_2} + \psi_{\Delta_3}) \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})) - \\
& - (\dot{\psi}_{s_1} + \dot{\psi}_{\Delta_1})(\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3} + \dot{\psi}_{\Delta_2} + \dot{\psi}_{\Delta_3})(\sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})) + \\
& + (\psi_{\Delta_2} + \psi_{\Delta_3}) \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})) + \\
& + m_3 L_1 a_3 ((\ddot{\psi}_{s_2} + \ddot{\psi}_{\Delta_2})(\cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})) - \\
& - (\psi_{\Delta_2} + \psi_{\Delta_3}) \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})) - \\
& - (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{\Delta_2})(\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3} + \dot{\psi}_{\Delta_2} + \dot{\psi}_{\Delta_3})(\sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})) + \\
& + (\psi_{\Delta_2} + \psi_{\Delta_3}) \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})) + \\
& + m_3 L_1 a_3 ((\ddot{\psi}_{s_3} + \ddot{\psi}_{\Delta_3})(\cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})) - \\
& - (\psi_{\Delta_2} + \psi_{\Delta_3}) \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})) - \\
& - (\dot{\psi}_{s_3} + \dot{\psi}_{\Delta_3})(\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3} + \dot{\psi}_{\Delta_2} + \dot{\psi}_{\Delta_3})(\sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})) + \\
& + (\psi_{\Delta_2} + \psi_{\Delta_3}) \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})) + \\
& + mg(K_1(\cos \psi_{s_1} - \psi_{\Delta_1} \sin \psi_{s_1}) + K_2(\cos(\psi_{s_1} + \psi_{s_2})) - \\
& - (\psi_{\Delta_1} + \psi_{\Delta_2}) \sin(\psi_{s_1} + \psi_{s_2})) + \\
& + K_3(\cos(\psi_{s_1} + \psi_{s_2} + \psi_{s_3})) - \\
& - (\psi_{\Delta_1} + \psi_{\Delta_2} + \psi_{\Delta_3}) \sin(\psi_{s_1} + \psi_{s_2} + \psi_{s_3}))
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые в (2.2), получим

$$A_{I_1} \psi_{\Delta_1} + A_{I_2} \psi_{\Delta_2} + A_{I_3} \psi_{\Delta_3} + B_{I_1} \dot{\psi}_{\Delta_1} + B_{I_2} \dot{\psi}_{\Delta_2} + B_{I_3} \dot{\psi}_{\Delta_3} + C_{I_1} \ddot{\psi}_{\Delta_1} + C_{I_2} \ddot{\psi}_{\Delta_2} + C_{I_3} \ddot{\psi}_{\Delta_3} = N \cdot x_N - D_{I_0} \quad (2.3)$$

Здесь

$$A_{I_1} = -mgK_1 \sin \psi_{s_1} - mgK_2 \sin(\psi_{s_1} + \psi_{s_2}) - mgK_3 \sin(\psi_{s_1} + \psi_{s_2} + \psi_{s_3})$$

$$A_{I_2} = -2F\ddot{\psi}_{s_1} \sin \psi_{s_2} - 2F\dot{\psi}_{s_1} \dot{\psi}_{s_2} \cos \psi_{s_2} - F\ddot{\psi}_{s_2} \sin \psi_{s_2} - F\dot{\psi}_{s_2}^2 \cos \psi_{s_2} - 2m_3 L_1 a_3 \ddot{\psi}_{s_1} \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - 2m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_1} (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3}) \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \ddot{\psi}_{s_2} \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_2} (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3}) \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \ddot{\psi}_{s_3} \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_3} (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3}) \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - mgK_2 \sin(\psi_{s_1} + \psi_{s_2}) - mgK_2 \sin(\psi_{s_1} + \psi_{s_2} + \psi_{s_3})$$

$$A_{I_3} = -2m_3 L_2 a_3 \ddot{\psi}_{s_1} \sin \psi_{s_3} - 2m_3 L_2 a_3 \dot{\psi}_{s_1} \dot{\psi}_{s_3} \cos \psi_{s_3} - 2m_3 L_2 a_3 \ddot{\psi}_{s_2} \sin \psi_{s_3} - 2m_3 L_2 a_3 \dot{\psi}_{s_2} \dot{\psi}_{s_3} \cos \psi_{s_3} - m_3 L_2 a_3 \ddot{\psi}_{s_3} \sin \psi_{s_3} - m_3 L_2 a_3 \dot{\psi}_{s_3}^2 \cos \psi_{s_3} - 2m_3 L_1 a_3 \ddot{\psi}_{s_1} \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - 2m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_1} (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3}) \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \ddot{\psi}_{s_2} \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_2} (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3}) \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \ddot{\psi}_{s_3} \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_3} (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3}) \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - mgK_3 \sin(\psi_{s_1} + \psi_{s_2} + \psi_{s_3})$$

$$B_{I_1} = -2F\dot{\psi}_{s_2} \sin \psi_{s_2} - 2m_3 L_2 a_3 \dot{\psi}_{s_3} \sin \psi_{s_3} - 2m_3 L_1 a_3 (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3}) \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})$$

$$B_{I_2} = -2F\dot{\psi}_{s_1} \sin \psi_{s_2} - F\dot{\psi}_{s_2} \sin \psi_{s_2} - 2m_3 L_2 a_3 \dot{\psi}_{s_3} \sin \psi_{s_3} - 2m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_1} \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3}) \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_2} \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_3} \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})$$

$$B_{I_3} = -2m_3 L_2 a_3 \dot{\psi}_{s_1} \sin \psi_{s_3} - 2m_3 L_2 a_3 \dot{\psi}_{s_2} \sin \psi_{s_3} - 2m_3 L_2 a_3 \dot{\psi}_{s_3} \sin \psi_{s_3} - 2m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_1} \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_2} \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3}) \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_3} \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})$$

$$C_{I_1} = 2A + 2m_3 L_2 a_3 \cos \psi_{s_3} + 2m_3 L_1 a_3 \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})$$

$$C_{i_2} = D + E + F \cos \psi_{s_2} + 2m_3 L_2 a_3 \cos \psi_{s_3} + m_3 L_1 a_3 \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})$$

$$C_{i_3} = m_3 L_2 a_3 \cos \psi_{s_3} + m_3 L_1 a_3 \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3})$$

$$\begin{aligned} D_{i_0} = & 2A\ddot{\psi}_{s_1} + D\ddot{\psi}_{s_2} + E\ddot{\psi}_{s_3} + 2F\ddot{\psi}_{s_1} \cos \psi_{s_2} - 2F\dot{\psi}_{s_1} \dot{\psi}_{s_2} \sin \psi_{s_2} + \\ & + F\ddot{\psi}_{s_2} \cos \psi_{s_2} - F\dot{\psi}_{s_2}^2 \sin \psi_{s_2} + 2m_3 L_2 a_3 \ddot{\psi}_{s_1} \cos \psi_{s_3} - \\ & - 2m_3 L_2 a_3 \dot{\psi}_{s_1} \dot{\psi}_{s_3} \sin \psi_{s_3} + 2m_3 L_2 a_3 \ddot{\psi}_{s_2} \cos \psi_{s_3} - \\ & - 2m_3 L_2 a_3 \dot{\psi}_{s_2} \dot{\psi}_{s_3} \sin \psi_{s_3} + m_3 L_2 a_3 \ddot{\psi}_{s_3} \cos \psi_{s_3} - m_3 L_2 a_3 \dot{\psi}_{s_3}^2 \sin \psi_{s_3} + \\ & + 2m_3 L_1 a_3 \ddot{\psi}_{s_1} \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - 2m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_1} (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3}) \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) + \\ & + m_3 L_1 a_3 \ddot{\psi}_{s_2} \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_2} (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3}) \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) + \\ & + m_3 L_1 a_3 \ddot{\psi}_{s_3} \cos(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) - m_3 L_1 a_3 \dot{\psi}_{s_3} (\dot{\psi}_{s_2} + \dot{\psi}_{s_3}) \sin(\psi_{s_2} + \psi_{s_3}) + \\ & + mgK_1 \cos \psi_{s_1} + mgK_2 \cos(\psi_{s_1} + \psi_{s_2}) + mgK_3 \cos(\psi_{s_1} + \psi_{s_2} + \psi_{s_3}) \end{aligned}$$

Так как во время проведения эксперимента положение стопы человека относительно стабилографа не определялось, примем $x_N = x_O = \tilde{x}_N$ (2.4)

где x_O - неизвестное положение начала отсчета стабилографа в системе отсчета O_1XY , а \tilde{x}_N - его показания.

2.2. Уравнения в конечных разностях

Для использования численных алгоритмов представим производные в виде конечных разностей.

$$\frac{d\psi_{\Delta_j}(t_i)}{dt} = \frac{1}{\tau} (\psi_{\Delta_j}(t_{i+1}) - \psi_{\Delta_j}(t_i)) \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2\psi_{\Delta_j}(t_i)}{dt^2} = \frac{1}{\tau^2} (\psi_{\Delta_j}(t_{i+1}) + \psi_{\Delta_j}(t_{i-1}) - 2\psi_{\Delta_j}(t_i)) \quad (2.6)$$

$$j = 1, 2, 3$$

Подставим выражения для разностных схем первой и второй производной (2.5), (2.6) и выражение (2.4) в (2.3) и сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned}
& U_1(t_i)\psi_{\Delta_1}(t_{i-1}) + V_1(t_i)\psi_{\Delta_2}(t_{i-1}) + W_1(t_i)\psi_{\Delta_3}(t_{i-1}) + U_2(t_i)\psi_{\Delta_1}(t_i) + \\
& \quad + V_2(t_i)\psi_{\Delta_2}(t_i) + W_2(t_i)\psi_{\Delta_3}(t_i) + U_3(t_i)\psi_{\Delta_1}(t_{i+1}) + \\
& \quad + V_3(t_i)\psi_{\Delta_2}(t_{i+1}) + W_3(t_i)\psi_{\Delta_3}(t_{i+1}) = \\
& \quad = N(t_i) \cdot x_o + N \cdot x_N(t_i) - D_{l_0}(t_i)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}
U_1^i & \equiv U_1(t_i) = \frac{C_{l_1}(t_i)}{\tau^2} \\
U_2^i & \equiv U_2(t_i) = -\frac{B_{l_1}(t_i)}{\tau} - 2\frac{C_{l_1}(t_i)}{\tau^2} \\
U_3^i & \equiv U_3(t_i) = \frac{B_{l_1}(t_i)}{\tau} + \frac{C_{l_1}(t_i)}{\tau^2} \\
V_1^i & \equiv V_1(t_i) = \frac{C_{l_2}(t_i)}{\tau^2} \\
V_2^i & \equiv V_2(t_i) = A_{l_2}(t_i) - \frac{B_{l_2}(t_i)}{\tau} - 2\frac{C_{l_2}(t_i)}{\tau^2} \\
V_3^i & \equiv V_3(t_i) = \frac{B_{l_2}(t_i)}{\tau} + \frac{C_{l_2}(t_i)}{\tau^2} \\
W_1^i & \equiv W_1(t_i) = \frac{C_{l_3}(t_i)}{\tau^2} \\
W_2^i & \equiv W_2(t_i) = A_{l_3}(t_i) - \frac{B_{l_3}(t_i)}{\tau} - 2\frac{C_{l_3}(t_i)}{\tau^2} \\
W_3^i & \equiv W_3(t_i) = \frac{B_{l_3}(t_i)}{\tau} + \frac{C_{l_3}(t_i)}{\tau^2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

В итоге получили систему уравнений вида (2.7) для определения величин $\psi_{\Delta_j}(t_i)$ по известным измерениям стабилграфа - $N(t_i)$, $\tilde{x}_N(t_i)$.

2.3. Совместная обработка показаний системы видеонаблюдений и стабилграфа

Положение скелетного трехзвенника определяется углами ψ_1, ψ_2, ψ_3 . В результате обработки экспериментальных данных [5] вычислены величины этих углов. Представим найденные величины

углов $\psi_{\mu_j}(t_i)$ в виде суммы углов $\psi_j(t_i)$, реализуемых в движении трехзвенника, и аддитивной погрешности ξ_{ij} , возникшей в результате обработки информации видеокамеры.

$$\psi_{\mu_j}(t_i) = \psi_j(t_i) + \xi_{ij} \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

Тогда из (2.1) с учетом (2.8) следует

$$\psi_{\Delta_j}(t_i) = \psi_{\mu_j}(t_i) - \psi_{s_j}(t_i) - \xi_{ij} \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

При обработке видеоизображения выделен участок длиной n кадров с частотой k кадров в секунду, синхронизированный с данными стабилорафа. Для этого участка запишем $3n$ уравнений вида (2.9). Добавим к системе уравнения (2.7). Заметим, что уравнения вида (2.7) можно записать только для $n-2$ моментов времени, так как первое и последнее уравнения могут служить для отыскания неизвестных величин $\psi_{\Delta_j}(t_0)$ и $\psi_{\Delta_j}(t_{n+1})$, отыскание которых не имеет смысла, так как для них не задано опорное решение.

Таким образом, для определения поправок ψ_{Δ_j} используем $3n$ уравнений вида (2.9) и $n-2$ уравнений вида (2.7) для $3n$ неизвестных величин $\psi_{\Delta_j}(t_i)$. Еще одной неизвестной величиной является x_0 , описывающая продольные отклонения начала отсчета платформы стабилорафа от оси голеностопного сустава.

Объединим уравнения (2.7) и (2.9) в единую систему и представим ее в матричном виде

$$\Omega x = \Theta + \xi, \quad (2.10)$$

где

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ U_1^2 & V_1^2 & W_1^2 & U_2^2 & V_2^2 & W_2^2 & U_3^2 & V_3^2 & W_3^2 & 0 & \dots & 0 & -N(t_2) \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & U_1^{n-1} & V_1^{n-1} & W_1^{n-1} & U_2^{n-1} & V_2^{n-1} & W_2^{n-1} & U_3^{n-1} & V_3^{n-1} & W_3^{n-1} & -N(t_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \psi_{\mu_1}(t_1) - \psi_{S_1}(t_1) \\ \psi_{\mu_2}(t_1) - \psi_{S_2}(t_1) \\ \psi_{\mu_3}(t_1) - \psi_{S_3}(t_1) \\ \psi_{\mu_1}(t_2) - \psi_{S_1}(t_2) \\ \psi_{\mu_2}(t_2) - \psi_{S_2}(t_2) \\ \psi_{\mu_3}(t_2) - \psi_{S_3}(t_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_{\mu_1}(t_n) - \psi_{S_1}(t_n) \\ \psi_{\mu_2}(t_n) - \psi_{S_2}(t_n) \\ \psi_{\mu_3}(t_n) - \psi_{S_3}(t_n) \\ N(t_2)\tilde{x}_N(t_2) - D_{i_0}(t_2) \\ \vdots \\ N(t_{n-2})\tilde{x}_N(t_{n-2}) - D_{i_0}(t_{n-2}) \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \psi_{\Delta_1}(t_1) \\ \psi_{\Delta_2}(t_1) \\ \psi_{\Delta_3}(t_1) \\ \psi_{\Delta_1}(t_2) \\ \psi_{\Delta_2}(t_2) \\ \psi_{\Delta_3}(t_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_{\Delta_1}(t_n) \\ \psi_{\Delta_2}(t_n) \\ \psi_{\Delta_3}(t_n) \\ x_0 \end{pmatrix}$$

ξ - вектор погрешности измерений

Матрица Ω имеет размерность $(3n+1 \times 4n-2)$, вектор x - размерность $(1 \times 3n+1)$, вектор Θ - размерность $(1 \times 4n-2)$.

Решая это переопределенное матричное уравнение методом наименьших квадратов [7], получаем решение для x в виде

$$x = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T \Theta \quad (2.11)$$

Полученное значение является вектором поправочных значений, уточняющих выбранные в начале приближенно "опорные

значения” углов ψ_{s_j} . Оценку углов следует искать в виде

$$\tilde{\psi}_j = \psi_{s_j} + \psi_{\Delta_j}$$

2.4. Компьютерное моделирование задачи совместной обработки показаний системы видеонаблюдений и стабилографа

Проведем численную проверку вышеописанного алгоритма с помощью математического моделирования. Рассмотрим модельное движение, у которого во время приседаний и вставаний тазобедренный сустав движется вертикально и находится над голеностопным суставом. Время движения примем равным одной секунде, $T = 1 \text{сек}$. Тогда угол ψ_1 выражается через ψ_2 по формуле

$$\psi_1 = \arctg\left(\frac{L_1 + L_2 \cos \psi_2}{L_2 \sin \psi_2}\right) \quad (2.12)$$

Положим, что ψ_2 и ψ_3 изменяются по закону

$$\psi_2 = \sin(\omega_2 t) \quad (2.13)$$

$$\psi_3 = \frac{\pi}{2} - \psi_1 - \psi_2 + \omega_3 t \quad (2.14)$$

Моделирование будем производить для значений параметров

$$\omega_2 = \frac{\pi}{3T}$$

$$\omega_3 = \omega_2 / 10$$

Примем следующие параметры системы

$$L_1 = 0.4 \text{м} \quad L_2 = 0.38 \text{м} \quad a_1 = 0.22 \text{м} \quad a_2 = 0.21 \text{м} \quad a_3 = 0.35 \text{м}$$

$m = 96 \text{ кг}$ - масса человека

$m_1 = 8.3 \text{ кг}$ - масса двух голеней

$m_2 = 27.2 \text{ кг}$ - масса двух бедер

$m_3 = 57.9 \text{ кг}$ - масса туловища (включая голову и руки)

$I_1 = 0.1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ - момент инерции голеней относительно их общего центра масс

$I_2 = 0.54 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ - момент инерции бедер относительно их общего центра масс

$I_3 = 1.5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ - момент инерции туловища, относительно его центра масс

$\lambda = 1/25$ - период дискретизации (соответствует частоте 25 кадров в секунду)

Значение параметров выбраны в соответствии с [8] для испытуемого, принимавшего участие в эксперименте.

Измерения $\psi_{\mu_1}, \psi_{\mu_2}, \psi_{\mu_3}$ заданы в результате добавления к значениям ψ_1, ψ_2, ψ_3 из (2.12) - (2.14) характерных погрешностей $\Delta\psi_j$

$$\psi_{\mu_j} = \psi_j + \Delta\psi_j \cdot k_{\psi} \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

В качестве грубой модели погрешностей использованы величины

$$\Delta\psi_j = \psi_{\mu_j}^{\text{exp}} - \psi_{s_j}^{\text{exp}} \quad j = 1, 2, 3$$

где $\psi_{\mu_j}^{\text{exp}}$ - измерения углов, взятые из реального эксперимента, $\psi_{s_j}^{\text{exp}}$ - величины тех же углов, полученные в результате сглаживания показаний окном Ханна шириной 0.4 секунды [5], k_{ψ} - заданный для всей реализации коэффициент, позволяющей варьировать интенсивность возмущения. Среднеквадратическое отклонение величины $\Delta\psi_1$ от нулевого среднего составило $\sigma_1^o = 0.37^o$ для угла ψ_1 , $\sigma_2^o = 0.78^o$ для угла ψ_2 и $\sigma_3^o = 0.40^o$ для угла ψ_3 .

Для модельного движения момент M_1^{mod} в голеностопном суставе вычислим по формуле (1.16). Измерения стабиллографа моделируются в виде $M_{1\mu}^{\text{mod}} = M_1^{\text{mod}} + \Delta M_1$. Здесь ΔM_1 - случайная погрешность “измерения”.

$$\Delta M_1 = \max M_1^{\text{mod}} k_M \cdot \eta \quad (2.16)$$

где η - случайная величина равномерно распределенная от -1 до 1, а k_M - константа, задающая величину относительной погрешности измерений момента. Величину x_o считаем равной нулю.

Проверим работу предлагаемого алгоритма. Для этого используем в качестве значений ψ_{s_j} величины, полученные из соотношений (2.12) – (2.14), и вычислим в результате решения системы (2.10) вектор x по “измерениям” углов ψ_{μ_j} из (2.15) и “измеренным” значениям момента $M_{1\mu}^{\text{mod}}$. Для рассмотренной задачи при идеальном решении поправки ψ_{Δ_j} должны принимать нулевые значения. Вычисления проводились в пакете MATLAB.

В таблицу 1 сведены результаты моделирования для измерения углов ψ_{μ_j} из (2.15) с погрешностями разной интенсивности и

относительной погрешностью измерения момента $k_M = 1/50$. Приведены среднеквадратические отклонения ошибки оценивания по показаниям видеокамеры и ошибки оценивания в результате совместной обработки показаний видеокамеры и стабилграфа. Видно, что для больших значений погрешностей $\Delta\psi_j$ при измерении углов предложенная процедура коррекции понижает среднеквадратическое отклонения погрешностей оценок углов. Однако для реальных значений погрешности, наблюдающейся в эксперименте, уточнение не происходит. При этом наблюдается систематическая ошибка метода $\sim 1^\circ$. Этот модельный результат косвенно подтверждается при попытке обработки результатов экспериментальных записей, проведенных в ИМБП РАН.

$\Delta\psi_j$		Ср. кв. отклонение оценки ψ_{Δ_1} σ_1 (градусы)	Ср. кв. отклонение оценки ψ_{Δ_2} σ_2 (градусы)	Ср. кв. отклонение оценки ψ_{Δ_3} σ_3 (градусы)
$k_\psi = 1$	Видеокамера	0.37	0.78	0.40
	Совместная обработка	0.62	0.77	0.42
$k_\psi = 2$	Видеокамера	0.75	1.56	0.80
	Совместная обработка	0.63	0.80	0.41
$k_\psi = 3$	Видеокамера	1.13	2.34	1.20
	Совместная обработка	0.67	0.84	0.41

Таблица 1. Результаты численного моделирования задачи совместной обработки показаний системы видеонаблюдений и стабилграфа.

По-видимому, основную долю ошибки в проведенных расчетах составляют погрешности алгоритма, связанные с ошибками вычисления производных при наличии дискретных измерений. Совершенствование этой части алгоритма, можно надеяться, позволит повысить его точность.

3. Восстановление значений углов с использованием показаний стабилографа

Рассмотрим задачу восстановления угла ψ_3 в тазобедренном суставе по показаниям стабилографа. Эта задача возникает, например, в случае, если при движении человека не удастся восстановить координаты верхнего катафота на туловище для некоторого интервала времени. Тогда на интервале времени $[t_2, t_{n-1}]$ величина угла ψ_3 остается неизвестной. Используем полученные результаты для решения задачи восстановления одного из углов многозвенника по двум другим и моменту в голеностопном суставе.

Пусть измеряются значения углов ψ_1, ψ_2 во все время движения и требуется оценить угол ψ_3 по опорному значению ψ_{s_3} и показаниям стабилографа. В качестве опорного значения угла можно использовать, например, линейную интерполяцию. Начальное $\psi_{\mu_3}(t_1)$ и конечное $\psi_{\mu_3}(t_n)$ значения угла ψ_3 в тазобедренном суставе известны. По показаниям стабилографа в соответствии с предположениями, сделанными в главе 1, вычислялся момент в голеностопном суставе $M_1 = N \cdot x_N$

3.1. Система уравнений для восстановления угла в тазобедренном суставе по двум другим углам и моменту в голеностопном суставе

Преобразуем систему (2.11). Считаем, что величины $\psi_3(t_1), \psi_3(t_n)$ известны, следовательно их поправки $\psi_{\Delta_3}(t_1)$ и $\psi_{\Delta_3}(t_n)$ равны нулю. Опорное решение для $\psi_3(t_i)$ выберем в виде линейного приближения.

$$\psi_{s_3} = \psi_{\mu_3}(t_1) + \frac{\psi_{\mu_3}(t_n) - \psi_{\mu_3}(t_1)}{t_n - t_1} t_i$$

Исключим из (2.7) соответствующие уравнения, считая, что $\psi_{\Delta_1}(t_i) = 0, \psi_{\Delta_2}(t_i) = 0, i = 2, \dots, n-2$, получим систему из $n-2$ уравнений с $n-2$ неизвестными $\psi_{\Delta_3}(t_i), i = 2, \dots, n-1$. Считаем величину x_o также известной. Система уравнений для определения ψ_{Δ_3} примет вид

$$\begin{pmatrix} W_2^2 & W_3^2 & 0 & \dots & 0 \\ W_1^3 & W_2^3 & W_3^3 & & \vdots \\ \vdots & & & W_1^{n-2} & W_2^{n-2} & W_3^{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & W_1^{n-1} & W_2^{n-1} & W_3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\Delta_3}(t_2) \\ \vdots \\ \psi_{\Delta_3}(t_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(t_2)x_N(t_2) - D_{l_0}(t_2) \\ \vdots \\ N(t_{n-1})x_N(t_{n-1}) - D_{l_0}(t_{n-1}) \end{pmatrix} + \xi \quad (3.1)$$

ξ - вектор погрешности.

В матричном виде система имеет вид $\Omega_1 x_1 = \Theta_1 + \xi$. Решая это матричное уравнение, получаем решение для $\psi_{\Delta_3}(t_i), i = 2, \dots, n-2$.

Таким образом, последовательность действий при восстановлении угла имеет вид:

1. Выбираем опорное решение ψ_{s_3} .
2. Вычисляем коэффициенты W_j^i и $D_{l_0}(t_i)$ по формулам (2.3) и (2.8) при $\psi_{s_1} = \psi_{\mu_1}$ и $\psi_{s_2} = \psi_{\mu_2}$.
3. Вычисляем матрицы Ω_1, Θ_1 .
4. Решаем задачу (3.1) методом наименьших квадратов.
5. Вычисляем $\psi_{\mu_3} = \psi_{s_3} + \psi_{\Delta_3}$.

3.2. Компьютерное моделирование задачи восстановления угла.

Для проверки эффективности вышеописанного алгоритма рассмотрим ту же модельную задачу, что и в 2.4.

На рис.6 представлены результаты оценивания угла ψ_3 для модельной задачи при $\lambda = 1/25$, что соответствует частоте дискретных измерений 25 кадров в секунду.

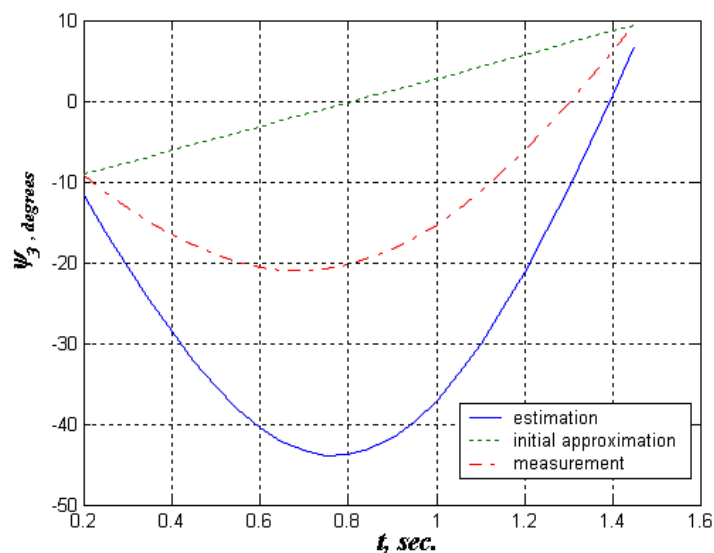


Рисунок 4. Результат моделирования решения задачи восстановления угла в тазобедренном суставе при частоте видеосъемки 25 гц.

Пунктирной линией изображено опорное значение ψ_{s3} - линейное приближение значения для угла ψ_3 , штрих-пунктирной линией изображено значения угла ψ_3 , сплошной линией изображено восстановленное значение угла $\psi_{s3} + \psi_{\Delta 3}$. Приведенный график показывает, что для описанной частоты измерений в 25 герц восстановить значения угла ψ_3 по показаниям стабилорафа не удастся: погрешность метода вычислений значительно превышает ошибку априорного линейного приближения.

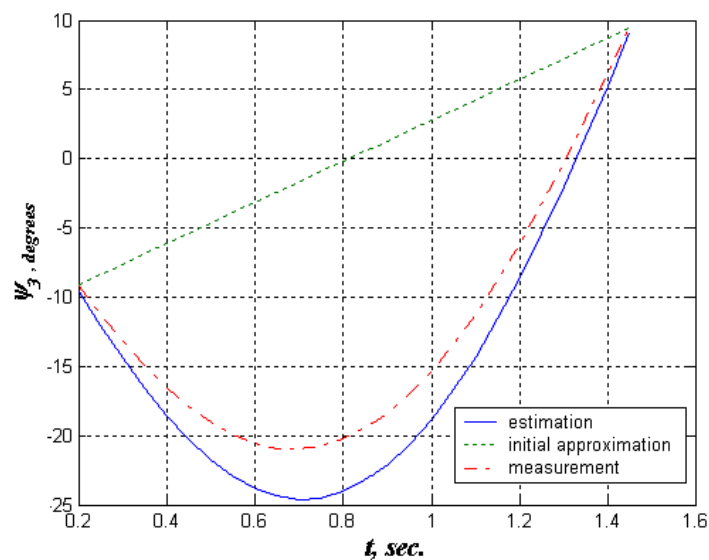


Рисунок 5. Результат моделирования решения задачи восстановления угла в тазобедренном суставе при частоте видеосъемки 100 гц.

На рисунке 5 изображены результаты численного эксперимента по восстановлению угла ψ_3 для частоты съема информации 100 герц. Приведенный график показывает, что для скоростной видеосъемки используемой наиболее более мощными системами анализа движений [9] подобная коррекция осуществима.

3.3. Результаты обработки экспериментальных данных в задаче восстановления угла

Используем имеющиеся экспериментальные данные для оценки возможности восстановления угла ψ_3 по показаниям стабилографа. Записи эксперимента, проведенного в ИМБП РАН, позволяют смоделировать ситуацию с восстановлением значений одного из углов антропоморфного трехзвенника. Запись системы видеонализа проводилась с частотой 25 гц. При обработке экспериментальных данных предполагалось, что значение угла ψ_3 утеряно на некотором интервале времени. Использовалась процедура восстановления угла в тазобедренном суставе описанная в предыдущем разделе

настоящей работы. Использована величина x_0 определенная по результатам вычислений раздела 2. Результат восстановления угла в тазобедренном суставе сравнивался с величинами угла ψ_3 , определяемыми прямыми вычислениями.

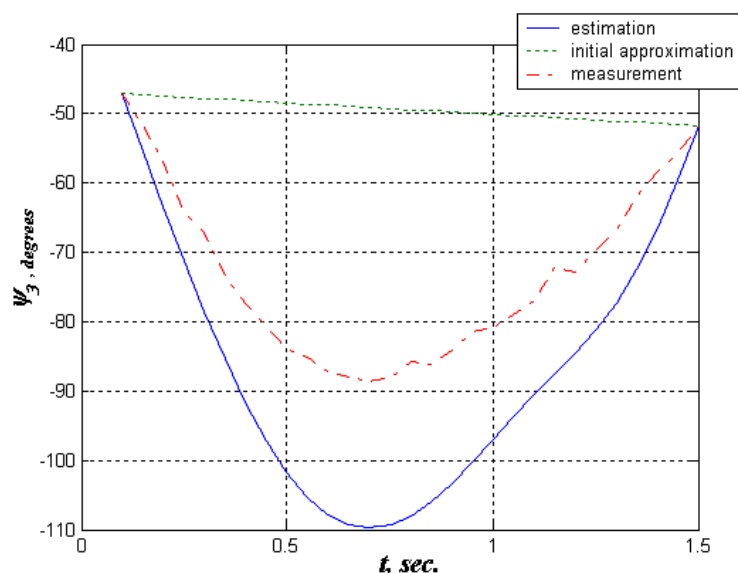


Рисунок 6. Результат решения задачи восстановления угла в тазобедренном суставе по результатам эксперимента при частоте видеосъемки 25 гц.

Результаты использования этой процедуры подтверждают итоги численного моделирования. Характерный пример решения задачи восстановления угла в тазобедренном суставе по результатам эксперимента приведен на рисунке 6. Как и для модельной задачи результат оценивания угла при частоте видеосъемки 25 Гц. представляется неудовлетворительным. Тем не менее, относительные погрешности оценивания для модельного примера и для экспериментальных данных имеют одинаковый порядок. Этот результат позволяет сделать предположение о том, что ошибки, вызванные допущениями, сделанными при построении математической модели, не превышают ошибок, вызванных дискретизацией модели и погрешностей метода оценивания.

Заключение

В заключение подведем итог проведенным исследованиям. В работе рассмотрены два варианта комплексирования измерительной информации. Первый из них связан с потенциальной возможностью уточнения результатов измерений в результате совместной обработки результатов измерения разнородных датчиков. Второй – позволяет восстанавливать утерянные измерения.

Возможность использования предлагаемых подходов проанализирована на примере исследования движения человека в сагиттальной плоскости при вставании и приседании. Использован один из простейших типов алгоритмов теории оценивания.

Попытки решения конкретных задач, позволяют сделать следующие выводы:

- Частота съема измерительной информации оказывает существенное влияние на эффективность предлагаемых алгоритмов.
- Ошибки, вызванные допущениями, сделанными при построении математической модели, скорее всего не превышают ошибок, вызванных дискретизацией модели и погрешностей метода оценивания.
- Совершенствование технологии обработки информации может позволить снизить уровень погрешностей для измерительных комплексов с относительно высокой частотой съема измерительной информации.
- Разработка алгоритмов уточнения результатов измерений при совместной обработке показаний нескольких датчиков целесообразна только для случая грубой информации.
- Предлагаемый подход может оказаться наиболее эффективным в задачах диагностики погрешностей и сбоев в биомеханических измерениях, а также при разработке алгоритмов устранения этих сбоев.

Литература

1. Витензон А.С. Закономерности нормальной и патологической ходьбы человека.- М. ЦНИИПП. 1998.
2. Воронов А.В. Роль одно- и двусуставных мышц нижней конечности в наземных локомоциях// Физиология человека. 2004. Т.30. N 4. С. 114-122.
3. Новожилов И.В. и др. Математическое моделирование сгибательно-разгибательных движений нижних конечностей при изменении вертикальной позы человека. – М. Изд-во мех-мат ф-та МГУ. 2001 г.
4. Копылов И.А., Кручинин П.А., Новожилов И.В. О реализуемости движений по Н.А.Бернштейну// Известия РАН. МТТ. 2003. N 5. С. 39-49.
5. Мишанов М.Ю., Саркисян М.В. Определение мышечных усилий при сгибательно-разгибательных движениях человека // Современные технологии в задачах управления автоматки и обработки информации. Труды XII Международного научно технического семинара. - М. Изд-во МЭИ. 2003. С. 134-135.
6. Скворцов Д.В. Клинический анализ движений. Стабилометрия.- М. Научно-медицинская фирма МБН. Антидор. 2000.
7. Александров В.В. и др. Оптимизация динамики управляемых систем.- М. Изд-во МГУ, 2000.
8. Бегун П.И., Шукейло Ю.А. Биомеханика. - СПб. Изд-во Политехника. 2000 г.
9. Воронов В.А. Доценко В.И., Титаренко Н.Ю. Титаренко К.Е. Компьютерный видеоанализ движений в научных исследованиях и клинической практике. // Биомеханика 2004. VII Всероссийская конференция по биомеханике. Тезисы докладов. - Нижний Новгород 2004. с. 36-38.

Математическое моделирование нарушений позы больных при rectus-синдроме и hamstring-синдроме

Журавлев А.М.,
ЗАО «Аконит-Медиа»
Кручинин П.А., Хакимов А.И.
МГУ им. М.В.Ломоносова

Важной и чрезвычайно сложной задачей биомеханики является математическое моделирование позы и движений человека с нарушениями системы регуляции движений. Для решения этой задачи необходимо моделировать особенности управляющих сигналов поступающих со стороны нервной системы. Попытки максимально точно отобразить особенности функционирования системы управления (например, с использованием технологии нейронных сетей [1]) до настоящего времени не дают удобного инструмента, позволяющего прогнозировать изменение позы или походки в результате оперативного вмешательства. В связи с этим, целесообразно моделирование основных особенностей позы и движения больных с помощью упрощенных структурных моделей и «грубых» предположений о целях и свойствах управления мышечными усилиями. Подобный подход разрабатывался ранее в [2,3]. Рассмотрим подробно задачу такого математического моделирования позы на примере больных с симптомокомплексами типа rectus-синдром и hamstring-синдром. Больные с этими синдромами относятся к группе больных с заболеваниями детского церебрального паралича и характеризуются повышенным тонусом различных групп двусуставных мышц бедра [4,5]. При rectus-синдроме повышен тонус прямой мышцы бедра (*m. rectus femoris*), а при hamstring-синдроме повышен тонус задней группы двусуставных мышц бедра, главным образом полусухожильной (*m. semitendinosus*), полуперепончатой (*m. semimembranosus*) и нежной (*m. gracilis*) мышц. Возможными клиническими проявлениями гипертонуса в первом случае является наклон таза, компенсаторный гиперлордоз и вторичная флексия либо экстензия коленных суставов, а во втором случае - фиксированная флексия коленных суставов. Исходная поза этих больных характеризуется тройным сгибанием в суставах нижних конечностей (Z-образной позой при стоянии). Рассмотрим модель, призванную описать распространенный вариант сохранения вертикальной позы у таких больных: относительно вертикальная поза на полусогнутых конечностях со слабо выраженными лордозом и наклоном таза, как можно видеть на фотографиях, помещенных на страницах 3 и 4 вкладыша.

Опишем положение корпуса человека в проекции на сагитальную плоскость. Рассмотрим традиционную плоскую трехзвенную антропоморфную схему скелетного многозвенника: невесомые стопа, голень, бедро, и тяжелый корпус (рис. 1). Голова и руки считаются неподвижными относительно корпуса, моделируемого твердым телом массой m , стопа неподвижна и не отрывается от пола. Обозначим через O_1, O_2, O_3 центры вращения соответственно голеностопного, коленного и тазобедренного суставов, через $|O_1O_2|=L_1, |O_2O_3|=L_2$ длины голени и бедра, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ - углы поворотов звеньев относительно неподвижной системы координат O_1XYZ , связанной со стопой. Обозначим через $\psi_1 = \varphi_1,$

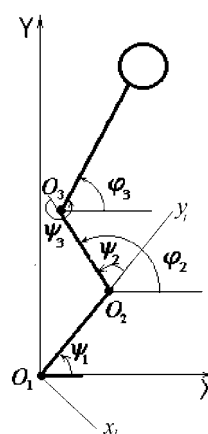


Рисунок 1. Обобщенные координаты для описания позы.

$\psi_2 = \varphi_2 - \varphi_1, \psi_3 = \varphi_3 - \varphi_2$ - углы относительных поворотов. На рисунке 2 представлена расчетная модель основных двусуставных мышц-антагонистов. На рисунке сплошными линиями изображены абсолютно жесткие элементы скелета и сухожильные окончания мышц, моделируемые нерастяжимыми нитями. Деформируемые, силовые элементы мышц изображены пунктиром. На рисунке обозначены также углы и линейные размеры, использованные для описания особенностей крепления мышц. Будем предполагать, что двусуставные мышцы играют ведущую роль в формировании позы.

Уравнения равновесия для приведенной структурной схемы выведены в [6,7] и имеют вид

$$\begin{aligned}
 -mgx_c + M_{\psi_1} + M_1 &= 0 \\
 -mga_c \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \alpha_c) + M_{\psi_3} + M_3 &= 0 \\
 -mg[L_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) + a_c \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \alpha_c)] + \\
 + M_{\psi_2} + M_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь

$$x_c = L_1 \cos \psi_1 + L_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) + a_c \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \alpha_c) \tag{2}$$

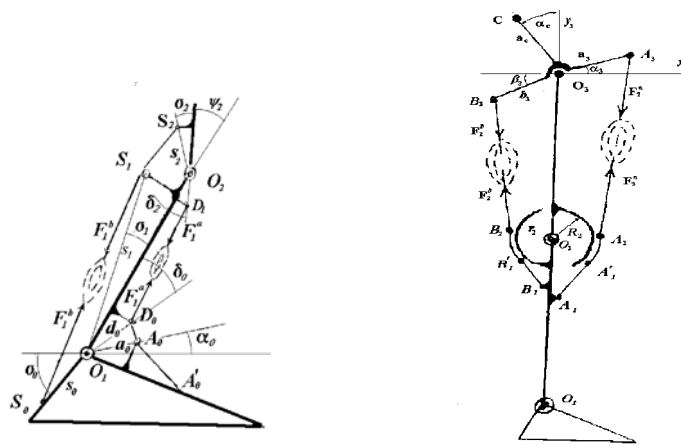


Рисунок 2. Приближенная схема крепления двусуставных мышц.

- координата центра масс C . M_1, M_2, M_3 - моменты, создаваемые односуставными мышцами в голеностопном, коленном и тазобедренном суставах; $M_{\psi 1}, M_{\psi 2}, M_{\psi 3}$ – моменты, создаваемые в этих же суставах двусуставными мышцами. Эти моменты определяются в соответствии со схемами на рис. 2 через усилия в мышцах по формулам в соответствии с [6,7]

$$M_{\psi 1} = -F_1^a \frac{\alpha_0 d_0}{|A_0 D_0|} \sin(\psi_1 - \alpha_0 - \delta_0) + F_1^b s_0 \sin(\psi_1 - \sigma_0 - \sigma_1),$$

$$M_{\psi 2} = -F_2^a R_2 + F_2^b r_2 + F_1^b \frac{s_2}{L_1} [\Delta_1 \sin(\psi_2 + \sigma_2) + L_1 \sin \sigma_1 \cos(\psi_2 + \sigma_2)],$$

$$M_{\psi 3} = -F_2^a a_3 \cos(\psi_3 + \alpha_3) + F_2^b b_3 \cos(\psi_2 + \beta_3),$$

где $|A_0 D_0| = \sqrt{a_0^2 + d_0^2 - 2a_0 d_0 \cos(\psi_1 - \alpha_0 - \delta_0)}$.

В эти выражения входят четыре силы $F_1^a, F_1^b, F_2^a, F_2^b$ развиваемые группами двусуставных мышц бедра и голени. Здесь и далее верхние индексы a и b принадлежат величинам, описывающим состояние передних и задних групп мышц соответственно. Нижний индекс 1 указывает на принадлежность параметра к характеристикам мышц голени, а индекс 2 – на принадлежность параметра к группе мышц бедра.

Для удержания вертикальной позы человеком характерно положение центра масс смещенное вперед по отношению к оси голеностопного сустава [8]. При таком положении будем предполагать, что передняя группа мышц бедра не напряжена, и будем считать, что $F_1^a = 0$.

Для моделирования усилий остальных групп мышц воспользуемся моделью мышечной силы из [9]. Идеализированная статическая зависимость силы F_i^k от длины l_i^k мышцы записывается в виде

$$F_i^k(l_i^k, \lambda_i^k) = \begin{cases} 0, & \text{при } l_i^k < \lambda_i^k \\ K_i^k(l_i^k - \lambda_i^k), & \text{при } l_i^k \geq \lambda_i^k \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $K_i^k = const$ – крутизна характеристики. Величина этой крутизны определяется так называемым стретч-эффектом - иннервацией мышечных волокон за счет внутримышечных обратных связей. Величина λ_i^k - сдвиг нуля характеристики - определяется высшими отделами нервной системы и является управляющим параметром силы мышцы.

Выведем соотношения для длин указанных двусуставных мышц.

- 1) Длина l_2^a прямой мышцы бедра.

Представим длину прямой мышцы бедра в виде суммы $l_2^a = |A_1A_1'| + |\cup A_1'A_2| + |A_2A_3|$. (см. рис.3)

Длина $|A_1A_1'|$ не зависит от углов в суставах и является величиной постоянной.

Длину $|A_2A_3|$ найдем используя теорему косинусов в $\Delta O_2O_3A_3$ и теорему Пифагора в прямоугольном $\Delta O_2A_2A_3$

$$|A_2A_3| = \sqrt{L_2^2 + a_3^2 + 2L_2a_3 \sin(\psi_3 + \alpha_3) - R_2^2}$$

.Наконец, длину дуги $|\cup A_1'A_2|$ найдем в виде

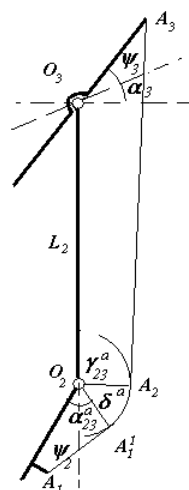


Рисунок 3. Нитяная модель прямой мышцы бедра.

$$|\cup A_1^1 A_2| = R_2 \delta^a = R_2 (\pi - \gamma_{23}^a - \alpha_{23}^a + \psi_2).$$

В этом выражении «анатомический» угол α_{23}^a не зависит от значений ψ_2 и ψ_3 , а значение угла γ_{23}^a определим в результате решения треугольников $\Delta O_2 O_3 A_3$ и $\Delta O_2 A_2 A_3$

$$\begin{aligned} \gamma_{23}^a = \arccos & \left[\frac{R_2}{\sqrt{L_2^2 + a_3^2 + 2L_2 a_3 \sin(\psi_3 + \alpha_3)}} \right] + \\ & + \arctg \left[\frac{a_3 \cos(\psi_3 + \alpha_3)}{L_2 + a_3 \sin(\psi_3 + \alpha_3)} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} l_2^a = \sqrt{L_2^2 + a_3^2 + 2L_2 a_3 \sin(\psi_3 + \alpha_3)} - R_2^2 + \\ + R_2 (\psi_2 - \gamma_{23}^a + \pi - \alpha_{23}^a) + |A_1 A_1^1| \end{aligned} \quad (6)$$

- 2) Длина l_2^b задней группы двусуставных мышц бедра (группы hamstring).

Аналогично предыдущему, длина l_2^b задней группы двусуставных мышц бедра вычисляется в виде

$$\begin{aligned} l_2^b = \sqrt{L_2^2 + b_3^2 + 2L_2 b_3 \sin(\psi_3 + \beta_3)} - r_2^2 + \\ + r_2 (\pi - \psi_2 - \gamma_{23}^b - \alpha_{23}^b) + |B_1 B_1^1| \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{23}^b = \arccos & \left[\frac{r_2}{\sqrt{L_2^2 + b_3^2 + 2L_2 b_3 \sin(\psi_3 + \beta_3)}} \right] + \\ & + \arctg \left[\frac{b_3 \cos(\psi_3 + \beta_3)}{L_2 - b_3 \sin(\psi_3 + \beta_3)} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

а величины $|B_1 B_1^1|$ и α_{23}^b как и аналогичные им величины в предыдущем случае не зависят от углов в коленном и тазобедренном суставах.

- 3) Длина l_1^b икроножной мышцы.

Длину l_1^b икроножной мышцы найдем в соответствии с рис. 4 по формуле

$$l_1^b = |S_0 S_1| + |S_1 S_2|.$$

Длину $|S_0S_1|$ найдем используя теорему косинусов в $\Delta S_0O_1S_1$, а длину $|S_1S_2|$ найдем используя теорему косинусов в $\Delta S_2O_2S_1$

$$|S_0S_1| = \sqrt{s_1^2 + s_0^2 - 2s_0s_1 \cos(\pi + \sigma_0 - \sigma_1 - \psi_1)}$$

$$|S_1S_2| = \sqrt{s_2^2 + |O_2S_1|^2 - 2s_2|O_2S_1| \cos(\pi - \psi_2 - \sigma_2 - \angle S_1O_2O_1)},$$

где $|O_2S_1| = \sqrt{L_1^2 + s_1^2 - 2L_1s_1 \cos \sigma_1}$, (9)

и $\angle S_1O_2O_1 = \arcsin \left[\frac{s_1}{|O_2S_1|} \sin \sigma_1 \right]$. (10)

Таким образом,

$$l_1^b = \sqrt{s_1^2 + s_0^2 + 2s_0s_1 \cos(\psi_1 - \sigma_0 + \sigma_1)} + \sqrt{s_2^2 + |O_2S_1|^2 + 2s_2|O_2S_1| \cos(\psi_2 + \sigma_2 + \angle S_1O_2O_1)}$$
 (11)

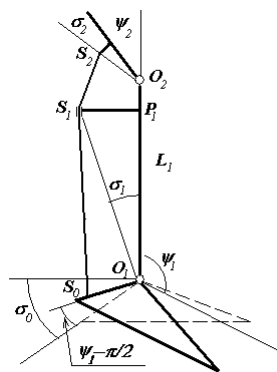


Рисунок 4. Нитяная модель икроножной мышцы

Соотношения (1)-(11) образуют систему уравнений, описывающих взаимосвязь сил двухсуставных мышц F_1^b, F_2^a, F_2^b , моментов односуставных мышц M_1, M_2, M_3 , углов скелетного многозвенника ψ_1, ψ_2, ψ_3 , и параметров управления мышечными усилиями двухсуставных мышц $\lambda_1^b, \lambda_2^a, \lambda_2^b$.

Для моделирования позы больного будем считать, что один из параметров управления λ_i^k для пораженной группы мышц определяется патологическим нервным импульсом. Клинический опыт [4,5] показывает, что величина λ_i^k для больного меньше длины λ_{io}^k

соответствующей группы мышц здорового человека в вертикальной стойке с выпрямленными ногами приблизительно на 4см.

Прочие переменные $\psi_1, \psi_2, \psi_3, M_1, M_2, M_3$ и значения λ_i^k для непораженных мышц при описании позы больного считаем неизвестными. Для описания позы примем следующие предположения и запишем соответствующие им соотношения.

1. Центр масс больного находится над голеностопным суставом (реальное его смещение на несколько сантиметров вперед сравнимо с погрешностями моделирования и не учитывалось)

$$x_c = L_1 \cos \psi_1 + L_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) + a_c \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \alpha_c) = 0. \quad (12)$$

2. Корпус удерживается в вертикальном положении

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \pi / 2. \quad (13)$$

3. Сумма квадратов моментов односуставных мышц минимальна

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 \rightarrow \min \quad (14)$$

Последнее предположение принято для определенности как одно из используемых (см. например [10,11]). Принципиально возможна минимизация и других функционалов.

Первые два предположения подтверждаются анализом клинических данных. Их подтверждением может служить также фото, приведенное на рис. III и IV вкладки.

Для численного решения этой задачи выразим из уравнения (13) угол ψ_3

$$\psi_3 = \pi / 2 - \psi_1 - \psi_2 \quad (15)$$

Подставим это выражение в уравнение (12) и разрешим его относительно ψ_2

$$\psi_2 = -\psi_1 + \arccos\left(\frac{a_c \sin \alpha_c - \frac{L_1}{L_2} \cos \psi_1}{L_2}\right) \quad (16)$$

и соотношение (14) примет вид

$$\psi_3 = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{a_c \sin \alpha_c - \frac{L_1}{L_2} \cos \psi_1}{L_2}\right). \quad (17)$$

Тогда алгоритм вычисления функционала $J(M) = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ по заданным значениям ψ_1 и λ_i^k представим в виде:

- 1) Из соотношений (16) и (17) вычисляются значения ψ_2 и ψ_3 по величине ψ_1 .
- 2) Длины мышц l_i^k вычисляются с использованием выражений (5)-(11).
- 3) Полученные значения l_i^k и заданные величины λ_i^k используются для определения усилий в двусуставных мышцах в соответствии с моделью Фельдмана (4).
- 4) Вычисляются моменты $M_{\psi 1}, M_{\psi 2}, M_{\psi 3}$ из соотношений (3).
- 5) Уравнения (1) используются для вычисления моментов M_1, M_2, M_3 .

6) Вычисляется минимизируемая величина

$$J(\psi_1, \lambda_1^b, \lambda_2^a, \lambda_2^b) = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2.$$

Задача минимизации этого функционала решалась численно с помощью функции *fminsearch* пакета MATLAB для следующих значений параметров:

$m=50$ кг, $\sigma_0=\pi/4$, $\sigma_1=2^\circ$, $\sigma_2=2,5^\circ$, $s_0 = 7$ см, $s_1 = 37$ см, $s_2 = 3$ см, $L_1=37$ см, $L_2=40$ см, $R_2=5$ см, $r_2=3$ см, $a_3 = 6.5$ см, $b_3 = 8,5$ см, $\alpha_3=28^\circ$, $\beta_3=28^\circ$, $a_c = 10$ см, $\alpha_c = 0$, $K=50$ кН/м.

Эти значения параметров приблизительно соответствуют человеку с ростом 150 см., итм среднего телосложения.

При моделировании позы больного с симптомокомплексом типа rectus-синдром значение λ_2^a принималось равным $\lambda_2^a = l_2^{a(0)} - \Delta\lambda_2^a$, где $l_2^{a(0)}$ длина прямой мышцы бедра в выпрямленной вертикальной стойке для здорового человека ($\psi_1 = 90^\circ$, $\psi_2 = \psi_3 = 0$), а $\Delta\lambda_2^a$ – изменения сдвига нуля характеристики прямой мышцы бедра, вызванное патологическим нервным импульсом.

Углы скелетного многозвенника и величины λ_1^b, λ_2^b принимались за неизвестные.

В результате формального решения задачи минимизации при различных значениях начальных приближений найдены три локальных минимума. При $\Delta\lambda_2^a = 4$ см эти минимумы соответствуют позам со значениями углов приведены в таблице 1. Изображение поз приведены на рис. 5.

Первое решение описывает глубокий присед больного, а третье решение соответствует позе с рекурвацией коленей. Представленная математическая модель не описывает особенностей биомеханики мышечной системы, важных при моделировании указанных поз. В связи с этим, сравнение 1-й и 3-й поз с клиническими данными бессмысленно.

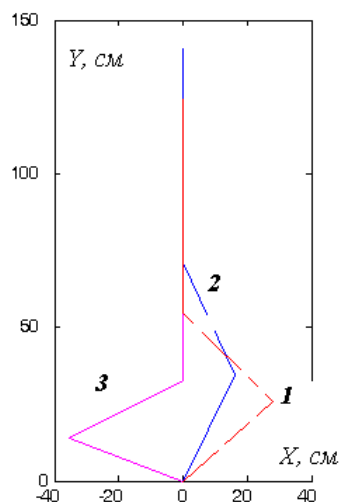


Рисунок 5. Решения системы уравнений, описывающей позу при rectus-синдроме

Таблица 1.

Номер решения	1	2	3
ψ_1	43°	65°	158°
ψ_2	91°	49°	-130°
ψ_3	-44°	-24°	62°

Предложенная математическая модель предназначалась для описания распространенной Z-образной позы, соответствующей второму решению таблицы 1. Решения этого типа полученные в результате решения задачи минимизации при различных $\Delta\lambda_2^a$ значения углов скелетного многозвенника приведены в таблице 2. В этой же таблице приведены значения этих углов для двух больных, полученные в результате измерений проведенных по фотографиям из архива А.М. Журавлева. Анализ этих значений показывает, что приведенная модель удовлетворительно описывает качественные особенности удержания позы больным при rectus-синдроме.

Таблица 2

	Модель				Больной 1	Больной 2
	2	3	4	5		
$\Delta\lambda_2^a$ (см)					неизвестна	
ψ_1	78°	71°	65°	58°	77 °	56 °
ψ_2	24°	36°	49°	62°	34 °	64 °
ψ_3	-12°	-18°	-24°	-30°	-19 °	-41 °

Заметим также, что снятие требования о вертикальном положении корпуса больного при моделировании ведет к выпрямлению колен моделирующего многозвенника, и сохраняет угол в тазобедренном суставе в районе 23°, что коррелируется с известными состояниями части больных, склонных к глубокому лордозу позвоночника в «вертикальной стойке». Таким образом, численно подтверждается предположение А.М.Журавлева о том, что Z-образная стойка больного вызвана стремлением больного удерживать туловище в вертикальном положении, избегая глубокого лордоза.

При моделировании позы больного с симптомокомплексом типа hamstring-синдром значение λ_2^b принималось равным $\lambda_2^b = l_2^{b(0)} - \Delta\lambda_2^b$, где $l_2^{b(0)}$ длина обобщенной мышцы для задней груп-

пы двусуставных мышц бедра в выпрямленной вертикальной стойке для здорового человека ($\psi_1 = 90^\circ$, $\psi_2 = \psi_3 = 0$), а $\Delta\lambda_2^b$ – изменения сдвига нуля характеристики мышц этой группы, вызванное патологическим нервным импульсом. Углы скелетного многосвязника и величины λ_1^b, λ_2^a принимались за неизвестные. В результате решения задачи выбирались значения углов, соответствующие Z-образной позе больного. Значения углов скелетного многосвязника, полученные в результате решения задачи минимизации при различных $\Delta\lambda_2^b$, приведены в таблице 3. В этой же таблице приведены значения этих углов для двух больных, полученные в результате измерений проведенных по фотографиям из архива А.М. Журавлева. Анализ этих значений показывает, что приведенная модель удовлетворительно описывает качественные особенности удержания позы больным при hamstring-синдроме.

Таблица 3

	Модель					Больной 1	Больной 2
$\Delta\lambda_2^a$ (см)	2	3	4	5	6	неизвестна	
ψ_1	76°	67°	60°	51°	40°	50°	67°
ψ_2	28°	43°	59°	76°	95°	66°	47°
ψ_3	-14°	-21°	-29°	-37°	-46°	-28°	-40°

Авторы благодарят доктора П.П.Демина за полезные консультации и студентов М.В.Саркисян и К.В.Никишина за помощь в проведении вычислений.

Литература

1. Morris A.R., Naumann S., D'Eleuterio G.M.T., Wedge J. Simulating Cerebral Palsy Lokomotion for Surgery. // VII-th International Symposium on Computer Simulation in Biomechanics. 1999. Calgary. Canada.
2. Кручинин П.А. Математическое моделирование позовых нарушений больного при rectus-синдроме. // Новые технологии в медицине. Сборник докладов Первой международной дистанционной научно-практической конференции. - СПб. 2004. с.116-118.

3. Кручинин П.А., Журавлев А.М., Хакимов А.И. Моделирование изменений позовых характеристик у больных ДЦП под влиянием коррегирующих операций// Биомеханика-2004. VII Всероссийская конференция по биомеханике: Тезисы докладов. - Нижний Новгород: ИПФ РАН. 2004. Т.1. С. 119-120.
4. Журавлев А.М. и др. Хирургическая коррекция позы и ходьбы при детском церебральном параличе. - Ереван: Изд-во "Ай-стан". 1986.
5. Перхурова И.С. и др. Регуляция позы и ходьбы при детском церебральном параличе и некоторые способы коррекции. - М.: Изд-во «Книжная палата». 1996.
6. Новожилов И.В. и др. Математическое моделирование сгибательно-разгибательных движений нижних конечностей при изменении вертикальной позы человека. - Изд-во мех-мат ф-та МГУ. М., 2001.
7. Копылов И.А., Кручинин П.А., Новожилов И.В. О реализуемости движений по Н.А.Бернштейну// Известия РАН. МТТ. 2003. N 5. С. 39-49.
8. Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л. Регуляция позы человека.- М.: Наука. 1965.
9. Фельдман А.Г. Центральные и рефлекторные механизмы управления. - М.: Наука. 1979.
10. Зациорский В.М., Прилуцкий Б.И. Нахождение усилий мышц человека по заданному движению// Современные проблемы биомеханики. - Нижний Новгород. 1992. Вып. 7. С.81-123.
11. Sotin A.V., Akulich Yu.A., Podgayets R.M. The calculation of loads acting on the femur during normal human walking// Russian Journal of Biomechanics. 2000. N 1.